

Inhomogene Staubströmungen in toroidalen Plasmafallen: Makro- und Mikrophysik

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von
Jochen Wilms

Kiel
2017

Erster Gutachter:	Prof. Dr. Alexander Piel
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Sebastian Wolf
Tag der mündlichen Prüfung:	20.12.2017
Zum Druck genehmigt:	19.01.2018

gez. Prof. Dr. Natascha Oppelt Dekanin

Kurzfassung

Im Fokus dieser Dissertation stehen die Eigenschaften und das Verhalten einer inhomogenen, stark gekoppelten Strömung von Mikrometer großen Partikeln („Staub“) in einem schwach magnetisierten anodischen Plasma. Die Entladung bildet ein aufrecht stehendes, torusförmiges Einschlusspotential für die elektrisch negativ geladenen Partikel aus, die sich – von der Ionenwindkraft beschleunigt – entlang dieses Einschlusses durch das Hintergrundgas bewegen. Aufgrund der Erdgravitation etabliert sich ein inhomogenes, stationäres Strömungsfeld, in dem die Partikel auf der einen Seite des Torus langsam aufsteigen und auf der anderen Seite schnell hinunterströmen. Zur Untersuchung dieses „Staubtorus“ werden zwei komplementäre Ansätze gewählt: zum einen Laborexperimente, zum anderen detaillierte LANGEVIN-Dynamik-Simulationen (LD). Letztere erlauben den Zugang zu Daten und Größen, die deutlich über die experimentellen Möglichkeiten hinausgehen. Die durchgeführten Untersuchungen decken vier Stoßrichtungen ab.

Den ersten Schwerpunkt stellt die experimentelle Untersuchung der inhomogenen Staubströmung dar. Selbsterregte Staubbichtwellen wirken – wie weitere Störungen – als Heizmechanismen auf das System. Durch Beseitigung dieser störenden Einflüsse relaxiert die Strömung in einen kristallinen Zustand und weist eine Anordnung der Partikel in festen Schalen bzw. Schichten auf, wie sie bereits zuvor in LD-Simulationen beobachtet wurde. Die Anordnung der Partikel zueinander zeigt hexagonale Strukturen, wie sie von statischen YUKAWA-Systemen her bekannt sind.

Der zweite Schwerpunkt besteht in einer hydrodynamischen Beschreibung der Staubströmung. Eine zum „Hydraulic Jump in offenen Kanälen“ mathematisch analoge Modellierung erklärt das Auftreten eines stationären, schockartigen Strömungszustands durch eine stehende, der Strömung entgegenlaufende Oberflächenwelle. Die Ergebnisse aus LD-Simulationen zeigen bezüglich des Auftretens der kritischen Strömungsbedingungen eine gute Übereinstimmung mit dem hydrodynamischen Modell. Darüber hinaus liefert dieses Modell eine Erklärung für die plötzliche Energiedissipation in dem entsprechenden Strömungsabschnitt.

Den dritten Schwerpunkt bildet die Analyse der Mikrophysik der Strömung. Beschleunigung und Verzögerung bewirken mechanische Spannungen auf der mikroskopischen Ebene und resultieren in einer Verformung der Partikelnachbarschaften, die wiederum zu strukturellen Phasenübergängen führen kann. Makroskopisch äußern sich die Übergänge in der Vereinigung und dem Aufspalten von Strömungsschalen. Die Dynamik der damit auf mikroskopischer Ebene verbundenen Umordnungsprozesse weist eine Bevorzugung von volumenerhaltenden Scherbewegungen im Vergleich zu Kompressionsbewegungen auf. Dies erklärt, warum sich die Strömung eines kompressiblen Fluids, wie es das staubige Plasma ist, dynamisch inkompressibel verhalten kann.

In dem vierten Schwerpunkt wird anhand einer numerischen Untersuchung die Übertragbarkeit aller zuvor dargelegten Ergebnisse auf ganze Strömungsklassen verdeutlicht. Staubströmungen verschiedener Querschnittsformen zeigen in vielen Bereichen nahezu identisches Verhalten, solange die jeweiligen Äquipotential- bzw. Äquikraftbetragsflächen von gleicher Größe sind.

Insgesamt gibt die vorliegende Dissertation erstmals Einblick in die Mikrophysik inhomogener, kristalliner Strömungen staubiger Plasmen und ermöglicht damit ein besseres Verständnis der Verknüpfung der Mikro- und Makrodynamik von Strömungen stark korrelierter Partikelsysteme.

Abstract

This thesis focusses on the properties and the behavior of an inhomogeneous strongly coupled flow of micrometer-sized particles ("dust") in a weakly magnetized anodic plasma. The discharge establishes an upright torus-shaped confinement for the electrically negatively charged particles. The ion drag force drives the particles through the gas background along the confinement. Due to gravity the resulting stationary flow pattern is inhomogeneous with low particle velocities on the ascending side of the torus and high particle velocities in the descending flow. For the analysis of this "dust torus", two complementary approaches are chosen: on the one hand laboratory experiments and on the other hand detailed LANGEVIN dynamics simulations (LD). The latter method allows analyses of the particle dynamics that go far beyond the possibilities of experimental set-ups. The presented investigations cover four main aspects.

The first key aspect is the experimental investigation of an inhomogeneous particle flow. Self-excited dust-density waves—and further disturbances—act as additional heating mechanisms for the system. By suppressing these disturbing effects the flow relaxes into a crystalline state with particle arrangement in distinct shells or layers—a behavior that was previously observed in LD simulations. The local arrangement of particles shows hexagonal structures as they are known from static YUKAWA systems.

The second key aspect is a hydrodynamic description of the dust flow. A model which is mathematically analogous to the "hydraulic jump in open channel flows" explains the appearance of a stationary shock-like flow state via a standing surface wave which propagates in opposite direction to the flow. The results of LD simulations show good agreement with the hydrodynamic model concerning the appearance of the critical flow conditions. Furthermore, the model gives an explanation for the sudden dissipation of kinetic energy in this segment of the flow.

The third key aspect is the analysis of the microphysics of the dust flow. Acceleration and deceleration cause stress on the microscopic level and result in a deformation of particle neighborhoods which in turn can cause structural phase transitions. Macroscopically, this manifests itself in the merging and the splitting of streaming shells. The microdynamics of the linked rearrangements show a preference of volume-preserving shear motion over compressional motion. This explains why the flow of a compressible medium like a dusty plasma can show dynamical incompressibility.

The fourth key aspect is the examination of the transferability of the presented results on entire flow classes by means of numerical experiments. Dust flows of differently formed flow cross-sections behave in a nearly identical way, as long as the areas of equal potential and the areas of equal absolute force, respectively, have the same size.

All in all, this thesis provides—for the first time—insights into the microphysics of inhomogeneous crystalline flows of dusty plasmas and thus contributes to a better understanding of the connection between micro- and macrodynamics of flows of strongly coupled particle systems.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Physikalische Grundlagen des betrachteten Systems	5
2.1	Physikalische Grundlagen staubiger Plasmen	5
2.1.1	Aufladung von Partikeln	6
2.1.2	Abschirmung und YUKAWA-Potential	8
2.1.3	Auf Staubpartikel wirkende Kräfte	9
2.1.4	Wichtige Kenngrößen staubiger Plasmen	16
2.1.5	Selbsterregte Staubdichtewellen	19
2.2	Physikalische Grundlagen anodischer Plasmen	22
2.2.1	Eigenschaften und Moden	22
2.2.2	Staubeinschluss	23
2.3	Zentrale Aspekte der hydrodynamischen Beschreibung von Strömungen . . .	24
2.3.1	Kontinuitätsgleichung	24
2.3.2	EULER'sche Gleichungen	25
2.3.3	NAVIER-STOKES-Gleichung	25
2.3.4	Exkurs: Projektionsmethoden	26
3	Toroidale Staubströmungen in schwach magnetisierten anod. Plasmen	29
3.1	Experimenteller Aufbau: MATILDA-II	29
3.2	Staubeinschluss in MATILDA-II	31
3.3	Toroidale Staubströmungen	32
4	Untersuchungs- und Analysemethoden	39
4.1	Experimentelle Untersuchungen	40
4.2	Analyseverfahren für experimentelle Daten	41
4.2.1	Particle Image Velocimetry	42
4.2.2	Particle Tracking Velocimetry	44
4.3	LANGEVIN-Dynamik-Simulationen	45
4.3.1	Modellfunktion für toroidale Staubströmungen	47
4.3.2	Analyseverfahren für Simulationsdaten	50
5	Experimenteller Nachweis kristalliner Staubströmungen	53
5.1	Radiale Dichtewellen in Staubtori	54
5.1.1	Vergleich mit der Dispersionsrelation selbsterregter Staubdichtewellen	57
5.1.2	Selbsterregte Staubdichtewellen im Bereich der Versuchsparameter .	58

5.2	Störungen in Staubtori	59
5.3	Kristalline Staubtori	62
5.3.1	Schichtstruktur entlang der Staubströmung	63
5.3.2	Kristalline Ordnung entlang der Staubströmung	65
5.3.3	Struktur im Strömungsquerschnitt	67
5.3.4	Strukturanalogien zwischen Experiment und Simulation	68
5.3.5	Diskussion des Aggregatzustands der Strömung	70
5.4	Zusammenfassung und Diskussion der experimentellen Untersuchung	71
6	Hydraulic Jumps in toroidalen Staubströmungen	73
6.1	Hydraulic Jumps in offenen Kanalströmungen	74
6.2	Zylindersym., inkompressible Staubströmungen in harmonischen Confinements	79
6.2.1	Anmerkungen zur Analogie zu offenen Kanalströmungen	84
6.2.2	Oberflächenwellen auf Zylindermänteln	85
6.3	Hydraulic Jumps in LD-Simulationen toroidaler Staubströmungen	87
6.4	Bewertung der Anwendbarkeit der Modellvorstellung auf die Torusströmung	93
7	Mikrophysik toroidaler Staubströmungen	95
7.1	LD-Simulationen stark gekoppelter Staubströmungen	95
7.2	Analyse der Makrophysik einer Staubströmung mit Hydraulic Jump	99
7.3	Analyse der Mikrophysik einer Staubströmung mit Hydraulic Jump	101
7.3.1	Analyse der Partikelnachbarschaften	101
7.3.2	Analyse der Dehnungs- und Rotationsraten	107
7.4	Vergleich von Strömungen mit und ohne Hydraulic Jump	110
7.5	Diskussion der mikrophysikalischen Prozesse im Staubtorus	112
7.6	Ergänzung: Überprüfung der Näherung des WIGNER-SEITZ-Radius	114
7.7	Exkurs: Alternative Verfahren zur Ermittlung der Partikelnachbarschaften	115
8	Einfluss der Einschlussgeometrie auf Strömungseigenschaften	117
8.1	Vorüberlegungen zur Wahl der Einschlussgeometrie	119
8.2	Simulationen zur Variation der Einschlussgeometrie – makrophys. Größen	122
8.3	Simulationen zur Variation der Einschlussgeometrie – mikrophys. Größen	126
8.4	Diskussion des Einflusses einer elliptischen Verformung des Einschlusses	129
9	Zusammenfassung	131
	Literaturverzeichnis	137
	Liste der Publikationen	157

1 | Einleitung

Die Forschung an und mit „staubigen Plasmen“ (engl. „Dusty Plasmas“ oder auch „Complex Plasmas“) hat sich im Bereich der Plasmaphysik in den vergangenen 25 Jahren als eigenständiges Gebiet etabliert [1–3]. Ein staubiges Plasma entsteht, wenn einem klassischen Plasma, bestehend aus Elektronen, Ionen und Neutralteilchen, eine vierte Komponente – der makroskopische „Staub“ – beigefügt wird. Hierbei handelt es sich um Partikel im Größenbereich von Nanometern bis hin zu einigen Mikrometern. Dieser Staub – im Laborexperiment meist sphärische Kunststoffpartikel – lädt sich elektrisch auf und integriert sich in die Plasmaumgebung.

Auf konkretes wissenschaftliches Interesse stießen staubige Plasmen ursprünglich zum einen im Bereich der Astrophysik, da sie im Kosmos als interstellares Medium vorkommen [4] – ein bekanntes Beispiel sind die Saturnringe – und zum anderen im Bereich der technischen Plasmen [5–8], da sie beispielsweise bei der Mikrochipherstellung auftreten. Inzwischen finden staubige Plasmen auch in weiteren wissenschaftlichen Bereichen Beachtung, unter anderem in der Fusionsforschung [9–12] und der Plasmadiagnostik [13, 14].

Als „Geburtsstunde“ der Grundlagenforschung in diesem Bereich wird rückblickend die Entdeckung des „Plasmakristalls“ im Jahr 1994 gesehen [15–19]. In einem solchen Plasmakristall koppeln die negativ geladenen Partikel über die elektrostatische Wechselwirkung stark aneinander und ordnen sich systematisch auf einem regelmäßigen mathematischen Gitter an. Die für die Untersuchung eines solchen Systems herausragenden Eigenschaften sind im Vergleich zu ähnlichen Forschungsobjekten, wie Ionenkristallen [20–22] oder kolloidalen Suspensionen [23, 24], dass (a) die beobachteten Partikel makroskopisch sind, dass (b) die Umgebung ihre Dynamik nur leicht dämpft und die Partikelbewegung damit weitestgehend entkoppelt von dem umgebenden Fluid analysiert werden kann¹ und dass (c) der Interpartikelabstand aufgrund der langreichweitigen elektrostatischen Wechselwirkung im Verhältnis zum Partikelradius groß ist. Aus diesem Grunde ist ein Plasmakristall hoch transparent und kann mit einfacher Videomikroskopie direkt auf Einzelteilchenebene beobachtet werden. Mit der Größe der Systeme geht einher, dass neben der Analyse auch die Manipulation derselben weniger Aufwand erfordert als in den anderen Fällen. In der Summe bildet ein staubiges Plasma daher ein ideales Modellsystem zum Studium gekoppelter Vielteilchensysteme auf der kinetischen Ebene [2, 3, 25].

¹ Dieser Aspekt stellt den zentralen Vorteil des betrachteten Systems gegenüber kolloidalen Suspensionen dar: Im Falle der staubigen Plasmen bewegen sich die Partikel in der Regel **durch** das Hintergrundfluid, also das eigentliche Plasma. Im Falle der kolloidalen Suspensionen bewegen sich die Partikel meist **mit** dem Fluid, also der Flüssigkeit, in der sie eingebettet sind. Aus diesem Grunde können dort die hydrodynamischen und die Wechselwirkungseffekte der Teilchen in der Regel nicht unabhängig voneinander betrachtet werden.

Diese Tatsache spiegelt sich auch in der Vielzahl verschiedener – teilweise interdisziplinärer – Forschungsschwerpunkte wider, die in den vergangenen Jahren bearbeitet wurden. Hierzu zählen unter anderem Einschluss und Ordnung zweidimensionaler Staubstrukturen [26–28], die Dynamik des Schmelzens bzw. von Phasenübergängen [26, 29–32], die Ausbildung von MACH’schen Kegeln [33–37], Wellenausbreitung [38–48] und Transportprozesse [49–52]. Darüber hinaus entwickelten sich finite Staubcluster mit geringen Partikelzahlen zu viel beachteten Systemen, sowohl zweidimensional in einer Ebene [53–57] als auch dreidimensional in Form von COULOMB- bzw. YUKAWA-Bällen [58–61]. Die Untersuchungen decken hier beispielsweise Strukturfragen und Eigenmoden der Cluster ab. Auch die Rotation solcher Cluster in zwei Dimensionen, direkt angetrieben mittels Lasermanipulation [62] oder indirekt durch die Auswirkungen eines zusätzlichen Magnetfeldes [63–65], wurde eingehend analysiert. Markant an diesen finiten Clustern ist, dass sich die Partikel in Ring- bzw. Schalenstrukturen anordnen können. In Bezug auf statische Systeme gelten die strukturbildenden Prozesse und die resultierenden Strukturen inzwischen als gut verstanden – ob ähnliche Ordnungsprozesse und Strukturen auch in strömenden Partikelsystemen auftreten können, ist indes kaum untersucht.

Der Einschluss der sich elektrostatisch abstoßenden Partikel stellt eine Hürde bei der experimentellen Erforschung staubiger Plasmen dar. Im einfachsten Fall werden diese in der Randschicht eines Hochfrequenzplasmas eingefangen, da hier die starken elektrischen Felder die Gravitationskraft auf die Teilchen zu kompensieren vermögen. Da jedoch alle Partikel in diese Schicht sedimentieren, ist auf diesem Wege in der Regel nur die Forschung an zweidimensionalen oder geschichteten Systemen möglich. Für Untersuchungen dreidimensional ausgedehnter Wolken muss der Einfluss der Erdgravitation auf den Staub gegenüber den betrachteten Effekten vernachlässigbar klein werden. Dies wurde in der Vergangenheit auf verschiedene Weisen erreicht, beispielsweise durch Verwendung von Partikeln sehr geringer Größe und Masse, sogenanntem Nanostaub [66], durch Kompensation der Gravitation mittels einer zusätzlichen, beispielsweise der thermophoretischen, Kraft [67] oder durch Experimente unter tatsächlicher Schwerelosigkeit in Falltürmen [68], auf Parabelflügen [69, 70], Höhenforschungsraketen [69] und Raumstationen [71, 72]. Eine im Zuge dieser Experimente zunächst überraschende Entdeckung war, dass sich innerhalb der eigentlich in Gänze gefüllt erwarteten Staubwolken zentrale staubfreie Bereiche, sogenannte „Voids“, bildeten – sowohl bei der Verwendung von Nanostaub [66] als auch unter Schwerelosigkeit [69, 73]. Die Entstehung dieser Voids konnte auf strömende Ionen zurückgeführt werden, die dem elektrischen Feld im Plasmabulk folgen und sich vom Entladungszentrum aus nach außen bewegen. Übertrifft die hierdurch wirkende Ionenwindkraft die entgegengerichtete elektrostatische Kraft auf die Partikel, so werden sie mit der Strömung getragen, bis sich ein Kräftegleichgewicht einstellt und ein staubfreier Bereich im Entladungszentrum entsteht (vgl. Abschn. 2.1.3 und 3.3). Darüber hinaus spielt die Ionenströmung im Bereich der staubigen Plasmen auch in anderen Zusammenhängen eine wichtige Rolle und ist selbst Gegenstand aktueller Forschungen. Neben der konkreten Bemessung der Ionenwindkraft, sowohl analytisch [74–77] als auch numerisch [78–82] und experimentell [83–87], stehen beispielsweise sogenannte „Ionenwakes“ (Raumladungsbereiche, die sich hinter Partikeln bilden) [28, 88–93] und die Anregung von Staubbichtewellen [94, 95] im Fokus von Untersuchungen. Auch in der vorliegenden Arbeit kommt strömenden Ionen eine bedeutsame Rolle zu. In der Vergangenheit beschränkten sich die Betrachtungen jedoch auf ihre Bedeutung für Staubeinschluss und Strömungsantrieb – ob und welche weitergehenden Effekte in einer Staubströmung auftreten können, ist bisher nicht erforscht.

Ein aktueller und interessanter Teilbereich der Forschungen im Gebiet der staubigen Plasmen ist die Untersuchung von Strömungsphänomenen – sowohl in Realexperimenten als auch mittels Simulationen. Die Untersuchungen umfassen hier beispielsweise das Entstehen von Vortexströmungen [69, 96–98], das Umströmen von Hindernissen [99], verscherte Strömungen [49], Kettenbildung der strömenden Partikel [100], Schockphänomene wie „Bow Shocks“ [101–103], Heizeffekte aufgrund der Viskosität des Mediums [104], den Einfluss der Erdgravitation auf Staubströmungen [105], das Aufbauen sogenannter „precursor solitons“ [106] und strömungsinduzierte Schockwellen [107, 108]. Darüber hinaus wurden in den vergangenen Jahren weitere Untersuchungen an einer stationären, torusförmigen, inhomogenen Staubströmung durchgeführt.

Diese Staubtori sind auch der Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit. Torusförmige Staubwolken wurden erstmalig 2005 von TROTTENBERG *et al.* im MATILDA-II-Experiment („**M**agnetized **L**inear **D**ischarge **A**rrangement“) beobachtet [109, 110] und in den vergangenen Jahren eingehend studiert [111–118]. Im MATILDA-II-Aufbau werden ausgedehnte Staubwolken aus mikrometergroßen Partikeln in einem schwach magnetisierten anodischen Plasma eingeschlossen. Ein solcher Einschluss wurde für kompakte Partikelwolken bereits 1995 von BARKAN *et al.* vorgestellt [119]. Auch im Falle des hier verwendeten experimentellen Aufbaus wurden zunächst kompakte Staubwolken untersucht. Die Entdeckung des Staubtorus erweiterte die Untersuchungsmöglichkeiten jedoch bedeutend, da hierdurch strömungsdynamische Prozesse direkt zugänglich wurden. Die Entstehung des Torus konnte darauf zurückgeführt werden, dass sich im Zentrum der Entladung ein ausge dehntes Void bildet und sich so eine ringförmige Gleichgewichtslage aus Ionenwindkraft und elektrischer Feldkraft ergibt [111]. Das resultierende torusförmige Einschlusspotential steht aufrecht in Bezug auf die Erdbeschleunigung. Durch das Magnetfeld wirkt eine LORENTZ-Kraft in $\vec{E} \times \vec{B}$ -Richtung auf die nach außen strömenden Ionen im System und resultiert in einer HALL-Komponente der Ionenwindkraft, die den Staub entlang des Einschlusses treibt. Sind genügend viele Partikel in der Falle eingeschlossen und ist die Antriebskraft ausreichend stark, um den Staub gegen die Erdbeschleunigung entlang des Confinements zu heben, beginnen Partikel um das zentrale Void zu strömen und eine torusförmige Staubströmung kann entstehen. Durch die beständige Dissipation von Bewegungsenergie über die Neutralgasreibung bildet sich ein stationäres, inhomogenes Strömungsfeld aus, in dem der Staub langsam in einer Torushälfte aufwärts steigt und schnell (parallel zur Erdbeschleunigung) auf der anderen Seite abwärts strömt. REICHSTEIN *et al.* entwickelten ein numerisches Modell, mit dem es möglich wurde, diese Strömung mittels LANGEVIN-Dynamik-Simulationen nachzuempfinden [115–118], und konnten auf diesem Wege zeigen, dass die toroidale Staubströmung neben laminarem Verhalten auch KELVIN-HELMHOLTZartige Instabilitäten oder stehende schockartige Strukturen aufweisen kann [115–117]. Darüber hinaus zeigten diese Simulationen, dass sich der Staub bei ausreichender Neutralgasreibung – und damit effektiver Kühlung – auf konzentrischen Schalen anordnet [115, 116] und die inhomogene Strömung strukturelle Phasenübergänge durchläuft [116]. Welche Ordnungsprozesse auf der mikrophysikalischen Ebene mit den schockartigen Ereignissen und den Phasenübergängen zusammenhängen und ob vergleichbare Staubströmungen in Realexperimenten staubiger Plasmen überhaupt darstellbar sind, ist indes bisher noch nicht geklärt.

Aus der Summe dieser Vorbetrachtungen resultiert eine Vielzahl offener Fragen, beispielsweise in Bezug auf strukturbildende Prozesse und die resultierenden Partikelstrukturen:

Finden sich in strömenden YUKAWA-Systemen die gleichen Prozesse und Strukturen, die aus ruhenden, kompakten Systemen bekannt sind? Kann das Medium einer Strömung stark gekoppelt sein und sogar kristalline Ordnung annehmen? Welchen Einfluss nehmen verschiedene Größen wie Reibung oder Strömungsquerschnitt auf das Strömungsverhalten? Was passiert auf der mikrophysikalischen Ebene, wenn aufgrund der Inhomogenität der Strömung strukturelle Phasenübergänge stattfinden? Wie hängen diese mikroskopischen Prozesse mit den makroskopischen Strömungseigenschaften zusammen?

Weitere Fragen, die über das Feld der staubigen Plasmen hinausgehen, ergeben sich, wenn in Betracht gezogen wird, dass Strömungen in der Physik klassischerweise mit dem Bereich der Hydrodynamik verbunden werden. Die Charakterisierung kontinuierlicher Fluide und ihrer Strömungszustände sind dort die zentralen Themen.

Doch wie verhält sich eine Strömung stark gekoppelter, diskreter Partikel? Kann auch eine solche Strömung durch eine hydrodynamische Modellierung erfasst werden? Inwieweit bauen sich durch Beschleunigung und Verzögerung innerhalb der Strömung Spannungen auf, wie äußern sich diese und wie relaxieren sie? Kann sich eine Strömung eines eigentlich kompressiblen YUKAWA-Systems inkompressibel verhalten, und wenn ja, wieso?

Die vorliegende Arbeit soll einen substantiellen Beitrag zur Beantwortung dieser Fragen liefern, indem die Dynamik einer inhomogenen Staubströmung in Torusform sowohl in Bezug auf ihre Makrophysik als auch auf ihre Mikrophysik eingehend mit experimentellen Untersuchungen und numerischen Analysen mittels LANGEVIN-Dynamik-Simulationen studiert wird.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Zunächst werden in Kap. 2 die allgemeinen, grundlegenden Eigenschaften des betrachteten physikalischen Systems „staubiges Plasma“ vorgestellt sowie die Eigenschaften des den Einschluss erzeugenden anodischen Plasmas. Darüber hinaus werden einige zentrale Aspekte der hydrodynamischen Beschreibung von Strömungen zusammengefasst. In Kap. 3 werden der experimentelle Aufbau und der tatsächliche Untersuchungsgegenstand – der Staubtorus – vorgestellt. Im anschließenden Kap. 4 werden die verwendeten Diagnostiken und Methoden präsentiert. Insbesondere findet sich hier auch eine Beschreibung der durchgeführten LANGEVIN-Dynamik-Simulationen. In Kap. 5 werden zentrale Ergebnisse aus den Untersuchungen im Laborexperiment vorgestellt. Ein Fokus liegt hier auf der Beschreibung des kristallartigen Strömungsverhaltens eines stark gekoppelten Systems. Ein Großteil der dort vorgestellten Ergebnisse ist in Ref. [120] veröffentlicht. In Kap. 6 wird eine Modellvorstellung zur hydrodynamischen Beschreibung der inhomogenen Staubströmung entwickelt und mittels Simulationen überprüft. Die Inhalte dieses Kapitels wurden in ähnlicher Weise in Ref. [121] vorgestellt. In Kap. 7 folgt eine ausführliche Diskussion des Zusammenhangs von makroskopischem und mikroskopischem Strömungsverhalten. In kürzerer Form wurden die Ergebnisse dieser Betrachtung in Ref. [122] veröffentlicht. Das ergänzende Kap. 8 stellt einen Bezug zwischen Tori verschieden geformter Strömungsquerschnitte her und erweitert damit den Gültigkeitsbereich der bisherigen Untersuchungen auch auf verformte Tori. Im abschließenden Kap. 9 werden die Untersuchungen der vier vorangegangenen Kapitel verknüpft und die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst.

2 | Physikalische Grundlagen des betrachteten Systems

Das physikalische System, das dieser Dissertation zugrunde liegt, ist ein staubiges Plasma. Einige zentrale Grundlagen staubiger Plasmen sowie des im Laborexperiment verwendeten anodischen Plasmas werden in diesem Kapitel vorgestellt. Darüber hinaus werden zum Ende des Kapitels einige Kernaspekte der klassischen Hydrodynamik skizziert. Bei den Ausführungen wurde Wert darauf gelegt, auch fachfremden Leserinnen und Lesern einen guten Zugang zu den Untersuchungen zu ermöglichen, jedoch stellen die Beschreibungen lediglich reduzierte, praxisrelevante Erläuterungen für das Verständnis der vorliegenden Arbeit dar. Für weitergehende Einblicke in die verschiedenen Bereiche werden in den jeweiligen Abschnitten Hinweise auf weiterführende Literatur gegeben.

2.1 Physikalische Grundlagen staubiger Plasmen

Staubige Plasmen sind seit ungefähr 25 Jahren Gegenstand der Grundlagenforschung und haben sich in dieser Zeit als eigenständiger Bereich in der Plasmaphysik etabliert [1–3]. Insbesondere die Entdeckung kristalliner Strukturen in staubigen Plasmen in den 90er Jahren zeigte das Potential dieser Systeme für modellhafte Betrachtungen [15–19]. In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die Physik der staubigen Plasmen gegeben. Für weitergehende Erläuterungen und eine ausführlichere Einführung in das breite Feld der staubigen Plasmen sei an dieser Stelle auf Lehr- und Fachbücher [3, 123–126] sowie Review-Artikel [2, 127] verwiesen.

Staubige Plasmen, wie sie in dieser Arbeit untersucht werden, können entstehen, wenn einem Plasma mikrometergroße Partikel zugeführt werden. Auch in diesem Fall erfüllt die Plasmaumgebung noch die Voraussetzungen des Plasmazustands:

- Sie besitzen eine Gesamtgröße, die die Abschirmlänge übertrifft, so dass sie nach außen Quasineutralität gewährleisten.
- In den DEBYE-Kugeln befinden sich ausreichend Teilchen, so dass sich das Plasma kollektiv verhält.
- Die Stoßraten der einzelnen Komponenten liegen weit unter den jeweiligen Plasmafrequenzen, so dass die elektrostatische Wechselwirkung gegenüber der Gaskinetik dominant ist.

Eine zentrale Eigenschaft von Plasmen ist die Quasineutralität. Während in einem „klassischen“ Plasma lediglich Ionen und Elektronen als geladene Spezies auftreten, muss im Falle der staubigen Plasmen der Staub als zusätzliche geladene Komponente berücksichtigt werden. In Laborplasmen ist die Beweglichkeit der Elektronen deutlich größer als diejenige der Ionen. Aus diesem Grunde treffen statistisch mehr Elektronen auf ein ungeladenes Staubteilchen. Dies führt in der Regel zu einer negativen Aufladung des Staubes auf eine Ladung $q_d = -Z_d e$ mit der mittleren Anzahl Z_d an negativen Elementarladungen e , die den Staub laden. Ausnahmen mit positiv geladenem Staub stellen Systeme dar, in denen Photoionisation [128] oder Sekundäremission [129, 130] relevant sind. Diese Effekte treten vor allem in astrophysikalischen Plasmen auf und spielen in den vorliegenden Untersuchungen keine substantielle Rolle.

Mit der Teilchendichte der Elektronen n_e , der Ionen n_i ¹ und des Staubes n_d lautet die Quasineutralitätsbedingung im staubigen Plasma

$$n_e + Z_d n_d = n_i. \quad (2.1)$$

Die Ansammlung von Elektronen auf dem Staub kann grundsätzlich zu einer signifikanten Verringerung der Elektronendichte n_e führen, dem sogenannten HAVNES-Effekt [131]. Da im Falle der in dieser Arbeit betrachteten Systeme die Staubbichte ($n_d \approx 10^{11}$) jedoch im Verhältnis zur Ionendichte ($n_i \approx 10^{15}$) sehr klein ist und die Staubladung maximal $Z_d e = 2500 e$ beträgt, kann dieser Effekt in den vorliegenden Betrachtungen vernachlässigt werden ($Z_d n_d = 2,5 \cdot 10^{14} < 10^{15} = n_i$).

2.1.1 Aufladung von Partikeln

Bemerkenswert ist, dass es „die“ Staubladung im Sinne einer festen, auf den Partikeln verankerten Ladung nicht gibt. Die mittlere Staubladung stellt ein dynamisches Gleichgewicht dar, das sich aus dem Zustrom elektrisch positiver und negativer Ladungsträger ergibt. Eine im Rahmen der komplexen (Labor-) Plasmen allgemein als Prinzipienmodell anerkannte Modellvorstellung für die Aufladung kleiner Partikel stellt das „Orbital Motion Limited Model“ (OML-Modell) [132, 133] dar. Mit „klein“ wird in diesem Zusammenhang die Eigenschaft bezeichnet, dass der Radius r_d der Staubpartikel kleiner als die Abschirmlänge λ_D (siehe Abschn. 2.1.2) ist. Kerngedanke dieser Modellvorstellung ist es, die Ströme positiver und negativer Ladungsträger I_i und I_e auf ein Partikel abzuschätzen. Durch den Ladungsträgerfluss stellt sich das Oberflächenpotential des Staubes Φ_d so ein, dass sich ein Gleichgewicht der Ströme ergibt ($I_i = I_e$). Es kann also ein Gleichgewichtspotential für die Partikeloberfläche ermittelt werden, das wiederum Auskunft über die Ladung q_d des Partikels gibt. Hierbei ist zu beachten, dass aufgrund des elektrischen Feldes, das sich um ein Partikel ausbildet, auch dessen effektiver Stoßquerschnitt variiert. Dieser Aspekt ist maßgeblich für die Namensgebung des Aufladungsmodells. Wird von einer negativen Staubladung ausgegangen, so werden negative Ladungsträger abgestoßen und der Stoßquerschnitt, bemessen mit dem kritischen Stoßparameter b_c , verkleinert sich. Umgekehrt verhält sich der Fall für Ionen: In ihrem Falle wächst der Stoßparameter b_c mit der negativen Ladung des Staubes. Der Stoßparameter b_c gibt in dieser Vorstellung einen Grenzwert dafür an, ob ein sich näherndes Teilchen das Staubpartikel erreicht oder nicht.

¹ Im Falle der staubigen Laborplasmen wird bei den Ionen stets von einfacher Ionisation ausgegangen. Andernfalls müsste die Ionendichte entweder mit der mittleren Ladung gewichtet oder in mehrere Summanden, die die einzelnen Ionisationsgrade berücksichtigen, aufgeteilt werden.

Wird nun davon ausgegangen, dass sich die Ladungsträger im Wechselwirkungsbereich mit einem Staubpartikel stoßfrei bewegen (die mittlere freie Weglänge also erheblich größer ist als die Abschirmlänge) und die Geschwindigkeiten der Elektronen und der Ionen jeweils MAXWELL-verteilt sind, so wird die Abnahme des Elektronenstromes I_e durch einen BOLTZMANN-Faktor berücksichtigt:

$$I_e = -n_e e v_{th,e} \pi r_d^2 \exp\left(\frac{e\Phi_d}{k_B T_e}\right) \quad (2.2)$$

und die Zunahme des Ionenstromes I_i durch den OML-Faktor:

$$I_i = n_i e v_{th,i} \pi r_d^2 \left(1 - \frac{e\Phi_d}{k_B T_i}\right) . \quad (2.3)$$

Für $\alpha \in \{e, i\}$ bezeichnen hierbei die Faktoren $n_\alpha e v_{th,\alpha}$ mit den thermischen Geschwindigkeiten $v_{th,\alpha} = [(8k_B T_\alpha) / (\pi m_\alpha)]^{1/2}$ die jeweilige Stromdichte und πr_d^2 den eigentlichen Staubquerschnitt. T_α bezeichnet jeweils die kinetische Temperatur der Spezies.

Durch Gleichsetzen der Strombeträge von Elektronen und Ionen ergibt sich eine transzendente Gleichung für das Gleichgewichtspotential Φ_d . In Analogie zu einer stromfreien Sonde wird das sich einstellende Potential auch Floatingpotential Φ_f genannt.

Zur Abschätzung der Partikelladung kann nun das Kapazitätsmodell herangezogen werden. In dieser Vorstellung wird das Staubeilchen als Kugelkondensator betrachtet, dessen zweite Schale im Abstand der Abschirmlänge λ_D angenommen wird. Hiermit ergibt sich eine Kapazität von

$$C_d = 4\pi\epsilon_0 r_d \left(1 + \frac{r_d}{\lambda_D}\right) . \quad (2.4)$$

Im Falle kleiner Partikelradien r_d im Vergleich zur Abschirmlänge λ_D geht diese Kapazität in die Kapazität eines einfachen Kugelkondensators über. Mit Hilfe des Floatingpotentials kann nun die Aufladung der Partikel berechnet werden:

$$q_d = -Z_d e = C_d \Phi_d . \quad (2.5)$$

Das hier kurz geschilderte OML-Modell verwendet einige Näherungen, die in vielen staubigen Laborplasmen nicht streng erfüllt sind, aber eine verhältnismäßig einfache und zügige Abschätzung der Größenordnung der Staubleadung ermöglichen. Um einen genaueren Wert der Ladung auf einem Partikel erhalten zu können, müssen die Auswirkungen dieser Näherungen auf die Betrachtungen und Rechnungen berücksichtigt werden. Zu nennen sind hier beispielsweise, dass der Berechnung der Ströme nach den Gleichungen (2.2) und (2.3) ein Wechselwirkungspotential mit COULOMB-Eigenschaften zugrunde liegt. Die abschirmende Wirkung des Plasmas wird an dieser Stelle nicht berücksichtigt. Auch geschieht der Einfang des Staubes in der Regel in Bereichen, in denen die Ionen driften, also eine Vorzugsrichtung besitzen, so dass die Annahme einer MAXWELL-Verteilung der Geschwindigkeiten nicht mehr gilt. Im einfachsten Falle werden hier die Geschwindigkeitsverteilungen überlagert, so dass eine verschobene MAXWELL-Verteilung angenommen werden kann. Tatsächlich können aber beispielsweise Abschattungseffekte auch weitere Folgen haben, die in den Berechnungen berücksichtigt werden müssen. Als dritter Aspekt sei in diesem Zusammenhang die Annahme genannt, dass sich die Teilchen im Wechselwirkungsfeld des Staubes stoßfrei bewegen. Diese Voraussetzung ist häufig nicht vollständig erfüllt.

Modelle, die die Stöße von Ionen und Neutralteilchen – insbesondere Ladungsaustauschstöße – berücksichtigen, weisen bei hohem Druck zum Teil erhebliche Abweichungen zur OML-Ladung auf. Diese Abweichungen entsprechen einer Entladung der Partikel durch einen erhöhten Ionenstrom. Während Modelle für schwach stoßbestimmte Plasmen noch einen analytischen Ansatz formulieren [134, 135] – die dennoch auf eine numerische Berechnung der Ströme hinauslaufen –, wird für stark stoßbestimmte Plasmen ein Kontinuumsmodell verwendet [136–138]. Vergleiche der angepassten Modelle mit ausführlichen Simulationen zeigen über weite Bereiche eine deutlich verbesserte Übereinstimmung der erhaltenen Parameter als das einfache OML-Modell [139, 140].

Neben der OML-Theorie gibt es auch weitere Modelle zur theoretischen Behandlung der Aufladung von Partikeln in Plasmen, beispielsweise die ABR-Theorie (ALLEN, BOYD und REYNOLDS) [141]. In dieser wird von einem radialen Zustrom von Ionen auf die Sonde bzw. das Partikel ausgegangen. Da dieses Modell jedoch nur sehr eingeschränkte Gültigkeit besitzt [142], soll es an dieser Stelle lediglich der Vollständigkeit halber erwähnt werden.

Die detaillierte Betrachtung der Ladungsprozesse und der Auswirkungen derselben auf die Partikeldynamik sind derweil aktuelle Forschungsfragen [143–145]. Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit ist die genaue Kenntnis der Partikelladung jedoch zweitrangig. Aufgrund des moderaten Druckes ist mit keiner Abweichung der Größenordnung der Partikelladung zu rechnen. Aus diesem Grunde wird in der Regel eine Partikelladung nach der OML-Theorie angenommen und dort, wo es von Bedeutung ist, eine mögliche Ladungsvariation in der Fehlerdiskussion berücksichtigt.

2.1.2 Abschirmung und YUKAWA-Potential

Ein Charakteristikum des Plasmas im Vergleich zu einem einfachen Gas ist, dass es in der Lage ist, elektrische Felder effektiv abzuschirmen. Entscheidend hierfür ist die große Mobilität der Ladungsträger im Plasma, die ein kollektives Verhalten der einzelnen Spezies ermöglicht. Um eine Störladung herum bildet sich durch elektrostatische Wechselwirkung ein Bereich entgegengesetzter Ladung aus, so dass in einem Abstand die elektrischen Felder verschwinden. In einem staubigen Plasma stellen die elektrisch geladenen Staubpartikel derartige Störungen dar. Ihr Einfluss auf das Plasma ist lediglich lokal, jedoch können die Partikel bei ausreichender Annäherung auch miteinander in Wechselwirkung treten. Aufgrund der Abschirmung wird diese Wechselwirkung aber geringer ausfallen als die klassische COULOMB-Kraft.

Zur Modellierung der Felder, die Störladungen in einem Plasma etablieren, wird typischerweise das YUKAWA-Potential (auch DEBYE-HÜCKEL-Potential genannt) angesetzt. Mit diesem berechnet sich das Potential Φ , das eine Störladung q_d im Abstand r hervorruft, zu

$$\Phi(r) = \frac{q_d}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right). \quad (2.6)$$

Hierbei bezeichnet λ_D die linearisierte DEBYE-Länge.

In der Plasmaphysik ist diese charakteristische Länge von besonderer Bedeutung und wird häufig zur Normierung von Längen genutzt. Bezogen auf die Potentialgleichung gibt die DEBYE-Länge den Abstand an, in dem das YUKAWA-Potential um den Divisor e (EULERSche Zahl) unter dem Potential der reinen COULOMB-Wechselwirkung liegt.

Die hier verwendete linearisierte DEBYE-Länge kombiniert die Abschirmwirkung von Elektronen λ_{De} und Ionen λ_{Di} . Sie wird ermittelt über den Zusammenhang

$$\lambda_D^{-2} = \lambda_{De}^{-2} + \lambda_{Di}^{-2} . \quad (2.7)$$

Die einzelnen DEBYE-Längen hängen wiederum proportional von der Wurzel der kinetischen Temperatur T_α der jeweiligen Spezies ab ($\alpha \in \{e, i\}$), sowie antiproportional von der jeweiligen Dichte n_α . Konkret lautet die Berechnungsvorschrift für die DEBYE-Längen

$$\lambda_{D\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_\alpha}{n_\alpha e^2}} . \quad (2.8)$$

Im Falle der in dieser Arbeit betrachteten Systeme wird in der Regel $n_e \approx n_i$ angenommen. Entsprechend unterscheiden sich die DEBYE-Längen der beiden Spezies lediglich durch die Temperaturen. Die untersuchten Plasmen sind nicht im thermodynamischen Gleichgewicht – typischerweise liegt in einem Laborplasma die Elektronentemperatur zwei Größenordnungen über der Temperatur der Ionen. Aus diesem Grunde leisten die Ionen in der Gleichung für die linearisierte Abschirmlänge den dominanten Beitrag ($\lambda_D \approx \lambda_{Di}$). Grundsätzlich ist auch bei dem Konzept des YUKAWA-Potentials zu berücksichtigen, dass es zunächst für ein ruhendes, ungestörtes Plasma gilt. Verändern sich die Bedingungen, muss überprüft werden, ob die Voraussetzungen noch erfüllt sind. So kann eine Ionendrift beispielsweise eine Modifikation der Abschirmlänge verursachen. Typischerweise wird eine solche modifizierte Abschirmlänge λ_S genannt. Neben der Temperatur wird in ihr ebenfalls die kinetische Energie der Bewegung berücksichtigt. Zunächst wurde eine solche modifizierte DEBYE-Länge von BARNES *et al.* vorgeschlagen [74]. Momentan im Fachbereich anerkannt ist die Interpolationsformel nach HUTCHINSON [78, 79]

$$\lambda_S^2 = \frac{\lambda_{De}^2}{1 + \frac{2k_B T_e}{2k_B T_i + m_i u_i^2}} + r_d^2 \quad (2.9)$$

mit der Driftgeschwindigkeit der Ionen u_i . Für driftfreie Ionen geht λ_S (unter Vernachlässigung des Partikelradius r_d) in die linearisierte DEBYE-Länge über, für hohe Driftgeschwindigkeiten wird der Beitrag der Elektronen dominant ($\lambda_S \approx \lambda_{De}$).

2.1.3 Auf Staubpartikel wirkende Kräfte

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Charakterisierung dynamischer Vorgänge in inhomogenen Staubströmungen. Dabei wird der Blick sowohl auf quasistatische Gleichgewichtssituationen – beispielsweise die Einschlussbedingung – als auch auf Änderungen des Bewegungsverhaltens des Staubes gelenkt. Maßgeblich für beides sind die dominanten Kräfte, die auf die Staubpartikel wirken. Im Folgenden sollen die für die vorliegende Situation entscheidenden Kräfte kurz vorgestellt werden.

Interpartikelwechselwirkung via YUKAWA-Kraft

Im vorangegangenen Abschnitt wurde beschrieben, dass – und in welcher Form – sich elektrische Potentiale um Staubpartikel in einem Plasma ausbilden. Befinden sich nun mehrere Partikel in ausreichender Nähe zueinander in einem Plasma, so treten diese über ihre Felder elektrostatisch in Wechselwirkung. Die elektrischen Felder sind die Gradienten der Potentiale. Für eine Ladung q_d im Ursprung des Koordinatensystems gilt dann

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}) = -\frac{q_d}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda_D}\right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} . \quad (2.10)$$

Für ein Partikel am Ort \vec{r} im elektrischen Feld von N weiteren Partikeln gilt dann für die resultierende Kraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_Y(\vec{r}) &= q_d \vec{E}(\vec{r}) \\ &= q_d \sum_{i \in N} \vec{E}_i(\vec{r}_i) \\ &= -\frac{q_d^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \in N} \frac{1}{|\vec{r}_i|^2} \left(1 + \frac{|\vec{r}_i|}{\lambda_D}\right) \exp\left(-\frac{|\vec{r}_i|}{\lambda_D}\right) \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|},\end{aligned}\quad (2.11)$$

mit den Relativpositionen \vec{r}_i der N anderen Partikel.

Gravitationskraft

Wie auf alle massebehafteten Objekte wirkt die Erdgravitation auch auf die Staubpartikel. Entsprechend gilt für die Gewichtskraft F_g auf ein Partikel der Masse m_d mit der Dichte ρ_d und dem Radius r_d

$$\vec{F}_g = m_d \vec{g} = \rho_d V_d \vec{g} = \rho_d \frac{4}{3} \pi r_d^3 \vec{g} \quad (2.12)$$

mit der Erdbeschleunigung \vec{g} . Diese Kraft skaliert mit r_d^3 , ihre Bedeutung hängt also maßgeblich von der Partikelgröße ab. Für sehr kleine Partikel, „Nanostaub“ genannt, kann diese Kraft häufig vernachlässigt werden, da sie im Vergleich zu den anderen im Plasma wirkenden Kräften die Staubpartikel kaum beeinflusst. Bei Experimenten mit Staub im Mikrometerbereich, wie sie hier vorgestellt werden, ist die Masse nicht mehr zu vernachlässigen und der Einfluss der Gravitationskraft ist signifikant.

In der Regel sorgt die Erdgravitation bei Laborexperimenten dafür, dass der Staub zu einer zweidimensionalen Schicht in der unteren Randschicht des Plasmas sedimentiert. Bei großen Staubmengen können so auch geschichtete Systeme entstehen, allerdings sind dies sehr spezielle dreidimensionalen Staubwolken, da der Einschluss sehr anisotrop ist und weitere Effekte, wie beispielsweise das „Alignment“ durch Ionenfoki [91–93], einen großen Einfluss auf die Struktur nehmen können.

Um allgemeinere, ausgedehnte dreidimensionale Strukturen untersuchen zu können, muss der Einfluss der Gravitationskraft kompensiert werden. Im Bereich der staubigen Plasmen werden hierzu verschiedene Verfahren genutzt, die jeweils selbst nicht nur „Werkzeug“, sondern auch Gegenstand der Forschung sind. Die erste Möglichkeit stellen Experimente unter realer Schwerelosigkeit dar.¹ Eine weitere Möglichkeit besteht in der Nutzung von Nanostaub mit vernachlässigbarem Eigengewicht [147–149]. Dieser Staub wird häufig „in situ“ erzeugt, das heißt, durch Beifügen geeigneter Gase (z. B. Acetylen) entstehen die Partikel durch plasmachemische Prozesse erst in der Entladung selbst. Die geringe Größe der Partikel führt dazu, dass die Individualbewegungen in videomikroskopischen Aufnahmen nicht auflösbar sind – es können nur kollektive Phänomene untersucht werden. Eine weitere Möglichkeit, ausgedehnte Staubwolken in Laborplasmen zu erzeugen, besteht darin, die Gravitationskraft durch eine gleich starke, entgegengerichtete Kraft zu kompensieren. Dies kann beispielsweise durch einen starken Temperaturgradienten und der daraus resultierenden thermophoretischen Kraft geschehen [58, 59, 67, 150] oder auch durch geeignete elektrische Felder, wie sie in einem anodischen Plasma auftreten können [119, 151, 152].

¹ Etabliert sind in diesem Feld Experimente in Falltürmen [68], auf Parabelflügen [69, 70], auf Höhenforschungsraketen [69] sowie auf Raumstationen [71, 72, 146].

Elektrische Feldkraft

Elektrische Felder spielen in Laborplasmen eine wichtige Rolle. Sie treten sowohl „natürlich“, beispielsweise in der Randschicht eines Plasmas, als auch „künstlich“ induziert auf. Das Feld der Randschicht spielt im Bereich der staubigen Plasmen eine besondere Rolle, da dieses es ermöglicht, geladene mikrometergroße Partikel gegen die Erdbeschleunigung zu levitieren und so Staubcluster einzufangen. Die Richtung der Kraft in Bezug auf die elektrischen Feldlinien \vec{E} hängt direkt von der Staubladung ab. Bei positiv geladenem Staub wäre sie parallel, bei negativ geladenem Staub ist sie antiparallel zu den Feldvektoren. Für die Berechnung dieser Kraft gilt die Gleichung der Elektrostatik

$$\vec{F}_{\text{el}} = q_d \vec{E} . \quad (2.13)$$

Da die Ladung direkt proportional zur Kapazität eines Staubpartikels ist und diese wiederum direkt vom Partikelradius abhängt, skaliert diese Kraft lediglich linear mit der Partikelgröße, wird also beispielsweise im Vergleich zur Gravitation dominant für kleine und vernachlässigbar für große Partikel.

Neutralgasreibung

Im Gegensatz zu einer Vielzahl von Untersuchungen, in denen statische Staubcluster betrachtet werden, ist die Reibung des Staubes im Hintergrundgas für Staubströmungen von besonderer Bedeutung, da hierdurch eine kontinuierliche Dissipation der kinetischen Energie der Partikel stattfindet. Entscheidend für diese Kraft ist eine Relativbewegung von Staub und Gas – es ist also zunächst nicht von Bedeutung, ob sich das Partikel durch ein ruhendes Gas bewegt oder ob ein strömendes Gas das Partikel beschleunigt. Für die Definition der Reibungskraft \vec{F}_n wird die Relativgeschwindigkeit \vec{v}_d des Partikels und des ruhend angenommenen Neutralgases genutzt. Entsprechend sorgt die Reibung für eine Abbremsung, also für eine der Bewegung stets entgegen gerichtete Kraft. Einen einfachen, für unsere Situation anwendbaren Ausdruck lieferte EPSTEIN bereits vor circa 100 Jahren [153] mit

$$\vec{F}_n = -\beta m_d \vec{v}_d . \quad (2.14)$$

In dieser Gleichung bezeichnet β den EPSTEIN-Reibungskoeffizienten, häufig auch Stoßrate genannt. Anschaulich ist β die Impulsverlustrate eines sich bewegenden Partikels. Diese berechnet sich zu

$$\beta = \frac{8\delta p}{\pi \rho_d r_d v_{\text{th},n}} \quad (2.15)$$

mit dem Koeffizienten δ , dem Neutralgasdruck p und der mittleren thermischen Geschwindigkeit der Neutralgasatome bzw. -moleküle $v_{\text{th},n}$. Erstgenannter Koeffizient berücksichtigt die Art der Streuung bei Stößen zwischen Partikel und Neutralgasteilchen. Er variiert zwischen $\delta = 1$ für spiegelnde Streuung und $\delta = 1,44$ für diffuse Streuung. In staubigen Plasmen wird in der Regel $\delta = 1,44$ angenommen [154, 155]. Für die mittlere thermische Geschwindigkeit der Neutralgasteilchen gilt¹

$$v_{\text{th},n} = \sqrt{\frac{8k_B T_n}{\pi m_n}} . \quad (2.16)$$

¹ Die zugrunde liegende Verteilung der Geschwindigkeit wird MAXWELL-BOLTZMANN-artig angenommen. Daher liegt die hier verwendete mittlere thermische Geschwindigkeit etwas höher als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit, die sich nach $v_{\text{th},m} = \sqrt{2k_B T_n / m_n}$ berechnet.

Hierbei bezeichnet T_n die Temperatur des Neutralgases und m_n die Masse eines Neutralgasteilchens. Für typische Experimentparameter (Argonplasma bei $T_n \approx 300$ K) beträgt die mittlere thermische Geschwindigkeit etwa $v_{th,n} = 400 \frac{m}{s}$. Da die Partikelmasse im Zähler der Reibungskraft mit r_d^3 wächst, zugleich der EPSTEIN-Koeffizient aber antiproportional zu r_d ist, skaliert die Reibungskraft mit dem Neutralgas mit r_d^2 .

Ionenwindkraft

Die Aufladung der Staubpartikel in einem Plasma resultiert aus dem beständigen Zustrom positiver und negativer Ladungsträger. Während die auftreffenden Elektronen aufgrund ihrer geringen Masse keinen relevanten Impuls übertragen, ist dies bei den Ionen – sofern sie eine Drift besitzen – anders. Die Kraft, die auf diesem Wege ausgeübt wird, wird Ionenwindkraft (engl.: ion drag force) oder kurz „Ionenwind“ genannt und wurde in der Vergangenheit sowohl analytisch [74–77] als auch numerisch [78–82] und experimentell [83–87] untersucht. Insbesondere der hiermit zusammenhängende Effekt des Ionenwakes ist noch immer Gegenstand der wissenschaftlichen Diskussion [91–93].

Im Gegensatz zu einem „Neutralwind“ ist bei einem „Ionenwind“ zu beachten, dass nicht nur die Teilchen einen Impuls übertragen, die auf ein Partikel treffen, sondern auch jene, die in ihrer Strömungsrichtung durch elektrostatische Wechselwirkung gestreut werden. Entsprechend ergibt sich die Ionenwindkraft \vec{F}_i aus der Summe der direkten Wechselwirkung, der sogenannten „Collection Force“ \vec{F}_c , die auch zum Ladungsstrom auf das Partikel beiträgt, und der indirekten „Orbital Force“ \vec{F}_o . Aufgrund der Verschiedenheit der beiden Beiträge in Bezug auf ihren Impulsübertrag besitzt das Staubteilchen unterschiedliche Streuquerschnitte $\sigma_c(v_s)$ und $\sigma_o(v_s)$ für Collection Force und Orbital Force, die in beiden Fällen vom Staubpotential Φ_d und der mittleren Ionengeschwindigkeit $v_s^2 = u_i^2 + v_{th,i}^2$ abhängen. Hierbei bezeichnet u_i die Driftgeschwindigkeit der Ionen und $v_{th,i}$ die thermische Geschwindigkeitskomponente. Bei dieser Betrachtung wird davon ausgegangen, dass Bewegungsanteile orthogonal zur Strömungsrichtung isotrop verteilt sind und sich daher im Mittel aufheben. Entsprechend ist im Folgenden die Richtung der Kraft parallel zur Driftrichtung der Ionen und die Beschreibung beschränkt sich auf den Kraftbetrag. In einem ersten Schritt werden nun die eher als qualitativ anzusehenden Überlegungen nach BARNES *et al.* [74] zusammengefasst, bevor anschließend ein kurzer Überblick über genauere Betrachtungsweisen gegeben wird.

Collection Force Die Betrachtung des Anteils der Kraft, der durch unmittelbaren Impulsübertrag zustande kommt, ist eng verknüpft mit der Betrachtung des Ionenstroms auf das Partikel. Alle Partikel der Ionenströmung, die einen Einfluss auf die Partikelladung nehmen, übertragen auch einen Impuls. Entsprechend wird im Modell nach BARNES *et al.* [74] die Kraft mit Hilfe eines Streuquerschnittes berechnet, der ein Analogon zu demjenigen bildet, der bereits zur Berechnung der Aufladung von Partikeln verwendet wurde. Diese Kraft ergibt sich als Produkt aus der Ionenflussdichte $n_i v_s$, dem Impuls je Ion $m_i u_i$ mit der Driftgeschwindigkeit u_i und eben diesem Streuquerschnitt $\sigma_c = \pi b_c^2$. Es folgt also

$$F_c = n_i v_s m_i u_i \pi b_c^2, \quad (2.17)$$

mit

$$b_c^2 = r_d^2 \left(1 - \frac{2e\Phi_d}{m_i v_s^2} \right). \quad (2.18)$$

Besonderes Interesse besteht hierbei in der Abhängigkeit der „Collection Force“ von der Driftgeschwindigkeit der Ionen u_i . Ist diese gering, so geht v_s in $v_{th,i}$ über. In diesem Falle skaliert die Kraft nahezu linear mit der Driftgeschwindigkeit, insbesondere verschwindet sie für drifffreie Ionen. Ist die Driftgeschwindigkeit groß gegenüber der thermischen Geschwindigkeit, so nähert sich v_s derselben an und der Zusammenhang zwischen Kraft und Driftgeschwindigkeit wird quadratisch. In letzterem Falle geht dann der kritische Stoßparameter b_c in den Partikelradius über. In der mathematischen Struktur ähnelt dieser Übergang dem von der Reibung nach der STOKES'schen Gleichung ($F_c \propto u_i$) für geringe Geschwindigkeiten hin zum Staudruck ($F_c \propto u_i^2$) im Falle hoher Geschwindigkeiten.

Orbital Force Alle Ionen, deren Stoßparameter b_i den kritischen Wert b_c unterschreitet, treffen auf das jeweilige Staubpartikel. Ionen, deren Stoßparameter etwas größer ist, treten nicht mehr in materielle Wechselwirkung, erfahren jedoch eine Impulsänderung durch COULOMB-Streuung¹. Auf diesem Wege geschieht ein Impulsübertrag auf das streuende Partikel. Die hieraus resultierende effektive Kraft wird entsprechend „Orbital Force“ genannt. Die Berechnung dieses Beitrages zur Ionenwindkraft stellt in der wissenschaftlichen Diskussion und Modellierung im Vergleich zur „Collection Force“ die größere Herausforderung dar. Einigkeit besteht darüber, dass nur Teilchen, die dem Partikel nahe kommen, in die Betrachtung einbezogen werden müssen – wie diese Teilchen gewählt werden, beeinflusst den Kraftbetrag jedoch entscheidend. Im Modell von BARNES *et al.* werden alle Ionen einbezogen, deren Stoßparameter b_i zwischen dem kritischen Wert b_c und der Abschirmlänge λ_D liegt. In diesem Modell berechnet sich der Orbitalanteil der Ionenwindkraft dann zu

$$F_o = n_i v_s m_i u_i 4\pi b_{\pi/2}^2 \ln \Lambda . \quad (2.19)$$

Die ersten Faktoren sind auch hier – wie im Falle der Collection Force – die Ionenflussdichte und der Impuls je Ion. Der Streuquerschnitt $\sigma_o = 4\pi b_{\pi/2}^2 \ln \Lambda$ weist eine kompliziertere Form auf. Hier ist $b_{\pi/2}$ der Stoßparameter für Streuung um 90°

$$b_{\pi/2} = \frac{Z_d e^2}{4\pi \epsilon_0 m_i v_s^2} \quad (2.20)$$

und $\ln \Lambda$ ist der COULOMB-Logarithmus, der aus der Integration des differentiellen Streuquerschnitts über die Streuparameter resultiert (siehe bspw. Ref. [125])

$$\ln \Lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_D^2 + b_{\pi/2}^2}{b_c^2 + b_{\pi/2}^2} . \quad (2.21)$$

Für kleine u_i geht auch hier v_s in $v_{i,th}$ über und es ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Kraftbetrag und Driftgeschwindigkeit. Für drifffreie Ionen verschwindet auch diese Kraftkomponente. Für große Driftgeschwindigkeiten geht $b_{\pi/2}$ gegen Null und b_c gegen r_d , so dass für den COULOMB-Logarithmus gilt: $\ln \Lambda \approx \ln(\lambda_D/r_d) = \text{const.}$ Da nun $b_{\pi/2}$ schneller gegen Null strebt, als die Driftgeschwindigkeit wächst, geht die Orbital Force auch für hohe Driftgeschwindigkeiten gegen Null.

¹ Tatsächlich wird in den „einfachen“ Modellen die Wechselwirkung zwischen Partikel und Ion COULOMB-artig angenommen. Dahinter steht der Gedanke, dass aufgrund der Annäherung der Exponentialfaktor in der YUKAWA-Kraft vernachlässigbar wird und das Potential in das mathematisch einfacher zu handhabende COULOMB-Potential übergeht.

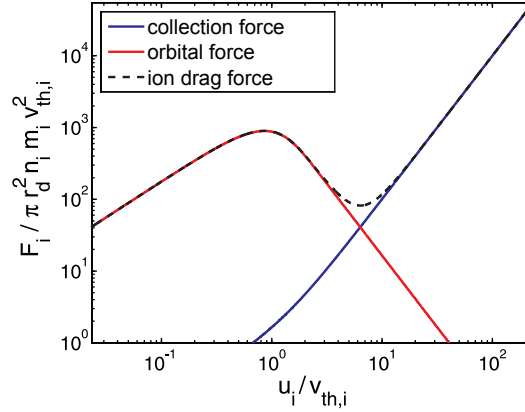


Abbildung 2.1: Ionenwindkraft (engl.: ion drag force) als Summe von Collection Force und Orbital Force. Für kleine Driftgeschwindigkeiten u_i dominiert die Orbital Force, durchschreitet ein Maximum und nimmt bei weiterer Zunahme von u_i ab. Bei höheren Driftgeschwindigkeiten wird die Collection Force dominant und die Gesamtkraft geht in diesen Kraftbeitrag über. Die dargestellten Funktionsverläufe wurden mit dem Modell von HUTCHINSON *et al.* [79, 80] ermittelt. (Abb. mit Genehmigung und Anpassung aus [156])

Die Ionenwindkraft, also die Summe aus Collection Force und Orbital Force, besitzt einen charakteristischen Verlauf (vgl. Abb. 2.1). Für geringe Driftgeschwindigkeiten dominiert die Orbital Force. Für schneller driftende Ionen durchschreitet diese ihr Maximum und nimmt wieder ab. Bei noch höheren Geschwindigkeiten wird schließlich die Collection Force dominant und die Kraft steigt quadratisch mit der Driftgeschwindigkeit.

In diesem eher als qualitatives Modell zu betrachtenden Ansatz werden einige Ungenauigkeiten in Kauf genommen. Wie bereits bei der Aufladung würde eine genauere Beschreibung beispielsweise eine Modellierung der Geschwindigkeiten der Ionen als verschobene MAXWELL-Verteilung verlangen. Auch die Frage, welche Abschirmlänge zum Einsatz kommen muss, ist Diskussionsgegenstand. Insbesondere müsste in einer genauen Betrachtung die Abhängigkeit der Abschirmlänge von der Driftgeschwindigkeit der Ionen berücksichtigt werden. Für Abschätzungen kann laut Ref. [75] jedoch vereinfachend die Elektronen-DEBYE-Länge verwendet werden. Ein weiterer Aspekt, der offenkundig zu einer quantitativen Ungenauigkeit führt, ist die Tatsache, dass Teilchen außerhalb der hier gewählten Begrenzung bereits in Wechselwirkung mit einem Partikel treten und dadurch Impuls übertragen können.

Betrachtungen, die sich dieser Problematiken annehmen und eine quantitative Beschreibung des Kraftbetrages der Ionenwindkraft anstreben, wurden beispielsweise von KHRAPAK *et al.* [76, 77] und HUTCHINSON *et al.* [79, 80] durchgeführt. Die Angabe analytischer Ausdrücke für die Beiträge zur Kraft unter Berücksichtigung einer verschobenen MAXWELL-Verteilung findet sich beispielsweise in Refs. [77, 79]. Für große Geschwindigkeiten gehen die Ausdrücke in das Modell von BARNES *et al.* [74] über, für geringe Driftgeschwindigkeiten ergeben sich substantiell verschiedene Werte. Hierzu trägt insbesondere der COULOMB-Logarithmus bei, sofern eine geschwindigkeitsabhängige Abschirmlänge verwendet wird.

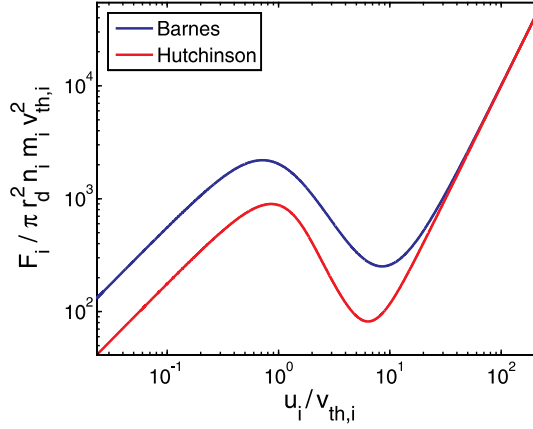


Abbildung 2.2: Vergleich der Ionenwindkraft nach BARNES *et al.* und HUTCHINSON *et al.*. Insbesondere im Bereich der geringen Geschwindigkeiten, in dem die Orbital Force dominant ist, zeigen sich signifikante Unterschiede. (Abb. mit Genehmigung und Anpassung aus [156])

Ausgehend von diesen Betrachtungen wurden die Modellvorstellungen mit Hilfe aufwändiger Simulationen mit dem sogenannten „SCEPTIC“-Code¹ weiter verfeinert [79]. Aus einem Fit an die Simulationsergebnisse wurde so ein analytischer Ausdruck für eine effektive Ionengeschwindigkeit gefunden. Im Grenzfall kleiner Staubpartikel – in dem sich die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen befinden – gehen dieses verfeinerte Modell und das Modell nach KHRAPAK *et al.* [76, 77] ineinander über [158].

Ein Vergleich des Modells von HUTCHINSON *et al.* mit der qualitativen Berechnung nach BARNES *et al.* ist in Abb. 2.2 dargestellt. Insbesondere im Bereich der langsamen Drift, in der die Orbital Force den dominanten Beitrag zum Ionenwind liefert, sind signifikante Abweichungen zu finden. Die Unterschiede zwischen den Modellen betragen hier teilweise mehr als einen Faktor zwei.

Es sei angemerkt: (a) Selbst diese Betrachtungen behandeln noch immer den stark vereinfachenden Fall von stoßfrei angenommenen Trajektorien der Ionen. Untersuchungen zum Einfluss von Kollisionen wurden bereits durchgeführt [80, 159], führten jedoch zu keinen einfach auf andere Situationen übertragbaren Ergebnissen. (b) Die Ionenwindkraft resultiert aus dem Impulseintrag der strömenden Ionen auf Staubpartikel und wirkt daher in Strömungsrichtung derselben. Besitzen die Ionen eine Bewegungskomponente, die orthogonal zu einem Magnetfeld verläuft, so ist an dieser Stelle die LORENTZ-Kraft zu berücksichtigen, die die Ionen in $\vec{u}_i \times \vec{B}$ -Richtung beschleunigt (mit der Ionendriftgeschwindigkeit \vec{u}_i und der magnetischen Flussdichte \vec{B}). Im Falle kleiner HALL-Parameter (s.u.), wie sie in dieser Arbeit auftreten, wird angenommen, dass die Ionen im Wesentlichen in Richtung des elektrischen Feldes \vec{E} driften, so dass die Ablenkung hauptsächlich in $\vec{E} \times \vec{B}$ -Richtung geschieht.

Übersicht über die Skalierung der Kräfte in Abhängigkeit der Partikelgröße

Für Untersuchungen an komplexen Plasmen – sowohl in statischen als auch in dynamischen Systemen – spielt der Einschluss der Partikel eine entscheidende Rolle. Ein sogenanntes Confinement wird in der Regel als stabile Gleichgewichtslage zweier entgegengesetzter

¹ Specialized-Coordinate Electrostatic Particle and Thermals In Cell [157]

Tabelle 2.1: Skalierung der auf Partikel wirkenden Kräfte in Abhängigkeit der Partikelgröße

Kraft	Variable	Proportionalität zum Partikelradius
Gewichtskraft	F_g	$\propto r_d^3$
Elektrische Feldkraft	F_{el}	$\propto r_d$
Neutralgasreibung	F_n	$\propto r_d^2$
Ionenwindkraft	F_i	$\propto r_d^2$

Kräfte gebildet. Im einfachsten Fall ist dies durch die untere Randschicht eines HF-Plasmas realisiert, in der die Erdbeschleunigung und die elektrische Feldkraft auf die negativ geladenen Partikel direkt entgegengesetzt wirken. Ein solches Gleichgewicht hängt aber stets mit den Partikeleigenschaften zusammen – insbesondere mit der Masse, der Ladung und den Streuquerschnitten. Alle diese Größen sind direkt vom Partikelradius abhängig, weshalb die Skalierung mit demselben von besonderem Interesse ist. Zur Übersicht sind aus diesem Grunde die Abhängigkeiten der verschiedenen genannten Kräfte vom Partikelradius in Tab. 2.1 zusammengestellt.

Abschließende Bemerkung zu den Kräften auf Staubpartikel: Die in diesem Abschnitt vorgestellten Kräfte stellen keinesfalls eine vollständige Auflistung der Kräfte dar, die auf Partikel in staubigen Plasmen wirken (können). Bekannte Beispiele für weitere, im Bereich der staubigen Plasmen auftretende Kräfte sind unter anderen die thermophoretische Kraft und die Kraft, die aus Strahlungsdruck resultiert. Die hier vorgestellte Auswahl wurde in Hinblick auf die in dieser Arbeit dominanten und relevanten Kräfte getroffen.

2.1.4 Wichtige Kenngrößen staubiger Plasmen

Zur Charakterisierung staubiger Plasmen und deren Eigenschaften haben sich im Laufe der Zeit einige Kenngrößen etabliert. Häufig handelt es sich hierbei um Adaptionen und Übertragungen von Größen, die in anderen Bereichen der Physik bereits genutzt werden. Da über Bedeutung und Aussagekraft dieser Größen weitestgehend ein Konsens im Fachbereich besteht und sie ausführlich in Fach- und Lehrliteratur [3, 123–126, 156] vorgestellt werden, soll sich die folgende Darstellung auf eine knappe Vorstellung der im Rahmen dieser Arbeit zentralen Größen beschränken.

WIGNER-SEITZ-Zelle

Im Bereich der Strukturuntersuchungen, insbesondere in Bezug auf Kristallstrukturen, ist das VORONOI-Diagramm (auch DIRICHLET-Zerlegung genannt) eines der Standardwerkzeuge, mit dem ein Gitter eindeutig in primitive Zellen zerlegt werden kann. Die Konstruktion der Zellen erfolgt ausgehend von den sogenannten Zentren, die in unserem Falle von den Positionen der Staubpartikel gebildet werden. Die Zerlegung ist beispielhaft für den zweidimensionalen Fall in Abb. 2.3 dargestellt. Es werden zunächst die Verbindungsstrecken von einem Zentrum zu allen anderen gebildet. Anschließend werden die Mittelsenkrechten auf diesen Strecken konstruiert. Die VORONOI-Zelle ist nun der von diesen Mittelsenkrechten umschlossene Raum um das Zentrum. Die so gebildete Zelle ist eindeutig und beschreibt den Raumbereich im Gitter, dessen Punkte das entsprechende Zentrum als nächstes Nachbarpartikel besitzen – alle anderen Partikel besitzen einen größeren Abstand.

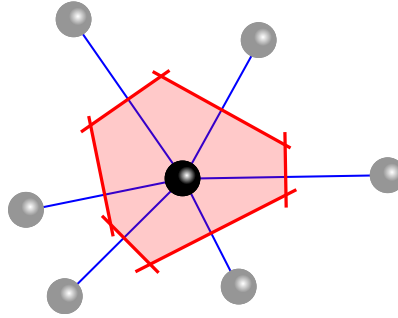


Abbildung 2.3: Konstruktion einer VORONOI-Zelle: Von einem Zentrum aus (schwarz markiertes Partikel) werden die Verbindungen zu den Partikeln der Nachbarschaft gezogen (blaue Strecken) und auf diese die Mittelorthogonalen konstruiert (rote Linien). Die hierdurch begrenzte Region um des Zentrum ist die VORONOI-Zelle.

Die WIGNER-SEITZ-Zelle ist der dreidimensionale Spezialfall dieser Zerlegung. Das mittlere Volumen der WIGNER-SEITZ-Zellen \bar{V}_{WS} entspricht der reziproken Teilchendichte

$$\bar{V}_{\text{WS}} = \frac{1}{n_{\text{d}}} . \quad (2.22)$$

Als WIGNER-SEITZ-Radius a_{WS} wird die Länge bezeichnet, die dem Radius einer Kugel entspricht, die das gleiche Volumen wie die WIGNER-SEITZ-Zelle besitzt:

$$a_{\text{WS}} = [3 / (4\pi n_{\text{d}})]^{1/3} . \quad (2.23)$$

(Staub-)Plasmafrequenz

Die Definition der Staub-Plasmafrequenz $\omega_{\text{p,d}}$ geschieht in vollkommener Analogie zu den entsprechenden Frequenzen für Elektronen $\omega_{\text{p,e}}$ und Ionen $\omega_{\text{p,i}}$:

$$\omega_{\text{p},\alpha} = \sqrt{\frac{q_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{\varepsilon_0 m_{\alpha}}}, \alpha \in \{\text{e, i, d}\} . \quad (2.24)$$

Bei der Plasmafrequenz handelt es sich um die Eigenfrequenzen der Spezies, mit der sie im Plasma bei einer kleinen Auslenkung aus der Ruhelage oszillieren würden. Darüber hinaus kann diese Frequenz als Schätzwert dafür genutzt werden, ob die Spezies einer externen elektrischen Anregung folgen können – bei Anregung mit einer höheren Frequenz verharren die betroffenen Spezies (näherungsweise) in Ruhe.

HALL-Parameter

Werden Experimente mit Ladungsträgern wie im vorliegenden Fall in Anwesenheit eines Magnetfeldes durchgeführt, so hat dies aufgrund der LORENTZ-Kraft Einfluss auf die Dynamik. Der HALL-Parameter H stellt eine Maßzahl dar, mit der dieser Einfluss beziffert werden kann. Er ergibt sich als Quotient aus der Zyklotronfrequenz $\omega_{\text{c},\alpha} = (|q_{\alpha}| \cdot B) / (m_{\alpha})$ der jeweiligen Partikelspezies ($\alpha \in \{\text{e, i, d}\}$) und der Stoßfrequenz mit Neutralteilchen ($\nu_{\alpha,\text{n}}$)

$$H_{\alpha} = \frac{\omega_{\text{c},\alpha}}{\nu_{\alpha,\text{n}}} . \quad (2.25)$$

Für $H_{\alpha} > 1$ gilt eine Spezies als magnetisiert. In diesem Falle wird die Partikelbewegung durch das magnetische Feld stark beeinflusst, die Bewegung erfolgt hauptsächlich entlang der magnetischen Feldlinien. Für $H_{\alpha} \ll 1$ ist der Einfluss vernachlässigbar.

Kinetische Temperatur

Zur Beschreibung der ungeordneten, aber statistisch erfassbaren Bewegung von Partikeln hat sich im Bereich der staubigen Plasmen der Begriff der „kinetischen Temperatur“ $T_{\text{d,kin}}$ etabliert. Hierbei handelt es sich um einen Ansatz analog zur kinetischen Gastheorie, in der die Energie des statistischen Anteils der Teilchenbewegung $E_{\sigma,\text{kin}}$ mit der thermischen Energie eines idealen Gases $E_{\text{T,kin}}$ gleichgesetzt wird. Für erste Energie gilt $E_{\sigma,\text{kin}} = m_{\text{d}}\sigma^2(v)/2$ mit der Standardabweichung der Teilchenbewegung $\sigma(v) = \sqrt{\sigma^2(v_x) + \sigma^2(v_y) + \sigma^2(v_z)}$. Für die thermische Energie gilt $E_{\text{T,kin}} = 3k_{\text{B}}T_{\text{d}}/2$. Die sich ergebende Temperatur lautet somit

$$T_{\text{d}} = \frac{m_{\text{d}}}{3k_{\text{B}}} [\sigma^2(v_x) + \sigma^2(v_y) + \sigma^2(v_z)] \quad (2.26)$$

und hat einen großen Einfluss auf die Strukturbildung in Staubclustern (siehe Kopplungsparameter im folgenden Absatz).

Kopplungsparameter

Der einheitenlose Kopplungsparameter stellt ein zentrales (Struktur-) Maß im Feld der staubigen Plasmen dar. Er ergibt sich als Quotient „ordnungsbildender“ potentieller Energie in Form von COULOMB'scher Wechselwirkungsenergie mit den Nachbarpartikeln [$E_{\text{WW,C}} = q_{\text{d}}^2 / (4\pi\epsilon_0 a_{\text{WS}})$] und „ordnungshemmender“ kinetischer Energie in Form thermischer Energie, bemessen mit $E_{\text{th}} = k_{\text{B}}T_{\text{d}}$. Es gilt also

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{d}}^2}{a_{\text{WS}}} \frac{1}{k_{\text{B}}T_{\text{d}}} \quad (2.27)$$

Anhand der Größe des Kopplungsparameters kann der Aggregatzustand eines Systems erkannt werden. Typische Größenordnungen hierbei sind $\Gamma \ll 1$ in einem gasartigen Zustand, Werte im Bereich $1 < \Gamma < 200$ für einen flüssigen Zustand und Werte von $200 < \Gamma$ für einen festen, kristallinen Aggregatzustand [125]. Die tatsächlichen Grenzen sind nicht statisch, sondern hängen beispielsweise von der Systemdimension und -größe ab (vgl. Abschn. 5.1). Der Zusammenhang zwischen „Ordnung“ und Kopplungsparameter ist in Abb. 2.4 dargestellt. Hier ist jeweils eine radiale Verteilungsfunktion (Paarverteilungsfunktion) für den kristallinen Zustand (a), einen flüssigen Zustand (b) und einen gasförmigen Zustand (c) aufgetragen. Der kristalline Zustand [Abb. 2.4 (a)] zeichnet sich durch ein großes partikelfreies Volumen um $r = 0 \mu\text{m}$ herum aus (engl. „excluded volume“) und durch eine hohe Winkel- und Abstandsordnung großer Reichweite. In der dargestellten Form ist ersteres an dem verzögerten Einsetzen der Steigung des Graphen zu erkennen und die hohe Abstandsordnung an der deutlich ausgeprägten Modulation, die die Lokalisierung der Partikel auch in großem Abstand zeigt. In Abb. 2.4 (b) ist der Graph für eine flüssige Phase aufgetragen. In diesem Falle ist das partikelfreie Volumen um das Zentrum herum bereits verkleinert und nur die erste Koordinationsschale ist deutlich lokalisiert. Der gasförmige Zustand, dessen radiale Verteilungsfunktion in Abb. 2.4 (c) dargestellt ist, besitzt lediglich ein kleines partikelfreies Volumen um die Teilchen und keine feste Winkel- oder Abstandsordnung – der Graph zeigt keine Modulation, die auf eine Systematik in der Partikelordnung schließen lassen könnte.

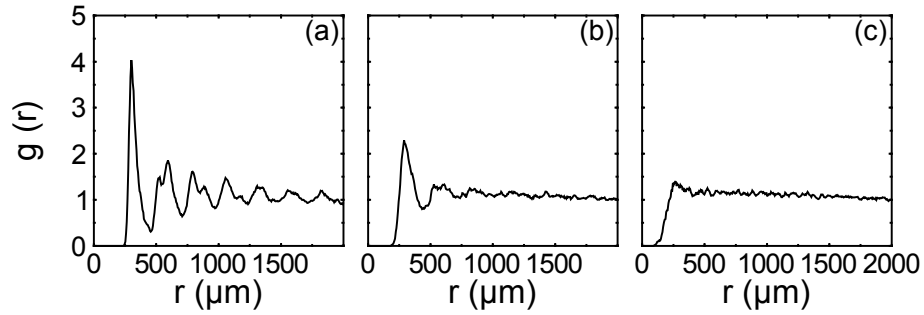


Abbildung 2.4: Radiale Verteilungsfunktionen der drei Aggregatzustände: (a) fest bzw. kristallin: Die Modulation der Kurve zeigt, dass selbst weit entfernte Nachbarn noch lokalisiert sind. Rund um das betrachtete Teilchen bildet sich ein großes „Excluded Volume“, in dem keine weiteren Partikel zu finden sind. (b) flüssig: Die direkte Nachbarschaft weist noch Abstandsordnung auf, in größerer Entfernung ist die relative Verteilung nahezu isotrop. (c) gasförmig: Es ist keine Abstandsordnung auszumachen und andere Teilchen können sich dem Zentralpartikel stark annähern. (Abb. mit Genehmigung und Anpassung aus [156])

2.1.5 Selbsterregte Staubbichtewellen

Die Untersuchung von Wellenphänomenen in staubigen Plasmen ist seit vielen Jahren ein etabliertes Forschungsfeld. Bereits 1990 haben RAO *et al.* [38] durch eine theoretische Betrachtung eine staubakustische Welle, die der bekannten ionenakustischen Welle in Plasmen sehr ähnelt, vorhergesagt. In diesem Falle werden die Staubpartikel an Stelle der Ionen als träge Komponente angenommen und die Abschirmung wird durch das Zusammenwirken von Elektronen und Ionen anstatt lediglich durch Elektronen bewirkt. Die deutlich erhöhte Trägheit führt zu deutlich niedrigeren Frequenzen als im Falle der ionenakustischen Welle – sie liegen lediglich bei einigen zehn Hertz.

1994 wurde von CHU *et al.* über eine Staubbichtefluktuation berichtet [160], die im Folgejahr von D'ANGELO als staubakustische Welle identifiziert wurde [161]. Die ersten systematischen Beobachtungen gelangen BARKAN *et al.* im gleichen Jahr [94].

Neuere Untersuchungen und Modelle erweitern das Bild der staubakustischen Welle mit einer linearen Dispersionsrelation auf eine allgemeinere Staubbichtewelle, bei der sich Phasen- und Gruppengeschwindigkeit unterscheiden können. Diese Wellen können durch Ionenströmungen spontan angeregt werden [162] und wurden im Bereich der schwach gekoppelten staubigen Plasmen in einer Vielzahl von Experimenten beobachtet. Die theoretischen Beschreibungen verfolgen hierbei verschiedene Ansätze, beispielsweise als Fluidtheorie [38] oder auch als kinetische Theorien [95]. Einen guten Überblick zu den Forschungen und Modellvorstellungen in diesem Bereich liefern zahlreiche Review-Artikel, z. B. Refs. [163–167], oder auch Bücher, in denen diese Thematik gezielt aufgegriffen wird, z. B. Refs. [126, 168]. Ein verbreitetes Fluidmodell zur Beschreibung dieses Wellentypes, das auch selbsterregte Staubbichtewellen zu erklären vermag, wird im Folgenden knapp präsentiert. Ausführliche und kommentierte Herleitungen finden sich unter anderem in den oben genannten Quellen.

Ausgangspunkt der Betrachtung sind die Kontinuitätsgleichung (2.28) und die Impulserhaltung (2.29) jeder der drei Plasmaspezies α sowie die POISSON-Gleichung (2.30), die die drei Plasmakomponenten in einer Gleichung miteinander verknüpft:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} (n_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0 \quad (2.28)$$

mit den Dichten n_α und den Geschwindigkeiten v_α ,

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \vec{v}_\alpha \operatorname{div}(\vec{v}_\alpha) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \operatorname{grad}(\Phi) - \frac{1}{n_\alpha m_\alpha} \operatorname{grad}(n_\alpha k_B T_\alpha) - \nu_\alpha \vec{v}_\alpha \quad (2.29)$$

mit dem Plasmapotential Φ , den Temperaturen der Spezies T_α und den effektiven Stoßraten ν_α , die alle Stöße der jeweiligen Spezies beinhalten und

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{e}{\varepsilon_0} (n_i - n_e - Z_d n_d) . \quad (2.30)$$

Mit Hilfe eines Störungsansatzes, der für Dichten, Geschwindigkeiten und das Potential harmonische ebene Wellen annimmt, bei denen Strömungsrichtung der Spezies und Ausbreitungsrichtung der Wellen parallel liegen, ergibt sich die Dispersionsrelation

$$1 + \sum_{\alpha=i,e,d} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{k^2 v_{T,\alpha}^2 - (\omega - k u_{\alpha 0}) (\omega - k u_{\alpha 0} + i \nu_\alpha)} = 1 + \chi_e + \chi_i + \chi_d = 0 , \quad (2.31)$$

die die Wellenzahl k und die Wellenfrequenz ω verknüpft. Hierbei bezeichnen die $u_{\alpha 0}$ die Driftgeschwindigkeiten der einzelnen Spezies, $\omega_{p,\alpha}$ sind die Plasmafrequenzen mit $\omega_{p,\alpha} = \sqrt{(q_\alpha^2 n_\alpha) / (\varepsilon_0 m_\alpha)}$ und $v_{T,\alpha}$ die thermischen Geschwindigkeiten, für die gilt: $v_{T,\alpha} = \sqrt{(k_B T_\alpha) / m_\alpha}$ ¹. Die einzelnen Summanden dieser Gleichung bezeichnen die Suszeptibilitäten χ_α der jeweiligen Spezies. Durch einige Näherungen und Annahmen lässt sich diese Dispersionsrelation stark vereinfachen. Es werden zunächst die Suszeptibilitäten der Elektronen und der Ionen betrachtet. Die Wellenkreisfrequenz ω ist im Vergleich zu den zugehörigen Plasmafrequenzen vernachlässigbar klein. Somit gilt für die zugehörigen Suszeptibilitäten

$$\chi_{i/e} = \frac{1}{\frac{k^2 v_{T,i/e}^2}{\omega_{p,i/e}^2} - \frac{(\omega - k u_{i0/e0}) (\omega - k u_{i0/e0} + i \nu_{i/e})}{\omega_{p,i/e}^2}} \approx \frac{\omega_{p,i/e}^2}{k^2 v_{T,i/e}^2 + k u_{i0/e0} (i \nu_{i/e} - k u_{i0/e0})} . \quad (2.32)$$

Im Falle der Elektronen gilt weiterhin, dass diese im Vergleich zur thermischen Geschwindigkeit nur eine geringe mittlere Strömung aufweisen. Dies führt zu

$$\chi_e \approx \frac{\omega_{p,e}^2}{k^2 v_{T,e}^2} . \quad (2.33)$$

Für den Staub wird angenommen, dass dieser zunächst ruht, also weder eine signifikante Temperatur aufweist noch eine Strömungsgeschwindigkeit besitzt. Somit folgt an dieser Stelle

$$\chi_d \approx \frac{\omega_{p,d}^2}{\omega (\omega + i \nu_d)} . \quad (2.34)$$

Mit Hilfe dieser Vereinfachungen lässt sich die Dispersionsrelation explizit angeben:

$$\omega(k) = -\frac{i \nu_d}{2} + \sqrt{-\frac{\nu_d^2}{4} + \frac{\omega_{p,d}^2}{1 + \chi_e + \chi_i}} . \quad (2.35)$$

¹ Die an dieser Stelle eingeführte „thermische Geschwindigkeit“ $v_{T,\alpha}$ entspricht nicht der zuvor eingeführten tatsächlichen thermischen Geschwindigkeit $v_{th,\alpha}$. Sie ist lediglich proportional zu ihr und dient in der Plasmaphysik hauptsächlich zur Vereinfachung mathematischer Terme.

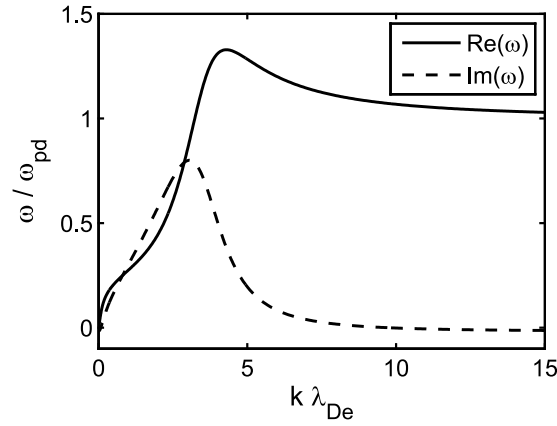


Abbildung 2.5: Dispersionsrelation $\omega(k)$ für einen typischen Parameterbereich, in dem ein Staubtorus im anodischen Plasma zu erwarten ist ($p = 5,4 \text{ Pa}$, $n_e = n_i \approx 6 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$, $n_d \approx 150 \cdot 10^9 \text{ m}^{-3}$, $|\vec{E}| \approx 500 \text{ Vm}^{-1}$, $q_d \approx 2500e$, $T_e \approx 3 \text{ eV}$, $T_i \approx 0,1 \text{ eV}$). Der Imaginärteil der Dispersionsrelation (gestrichelt dargestellt) ist über weite Teile positiv und deutet damit auf eine positive Anwachsrate der zugehörigen realen Frequenzen (durchgezogene Linie) hin.

Im Allgemeinen sind die sich ergebenden Frequenzen $\omega(k)$ komplexwertig. Hierbei bezeichnet der Realteil $\text{Re}[\omega(k)]$ die tatsächliche Frequenz, mit der die Schwingung bzw. Welle auftritt, und der Imaginärteil $\text{Im}[\omega(k)]$ die zugehörige Anwachsrate. Entsprechend treten selbsterregte Staubdichtewellen auf, wenn der entsprechende Imaginärteil der Dispersionsrelation positiv ist. Somit hängt das Auftreten einer selbsterregten Störung indirekt von der Staubdichte und der Staublading ab (da diese die Staubplasmafrequenz und die Ionenstoßrate beeinflussen), von dem Neutralgasdruck (der die Stoßfrequenzen beeinflusst), von der Ionen- und Elektronendichte und den Temperaturen (die die Frequenzen und Geschwindigkeiten beeinflussen) sowie von der Strömungsgeschwindigkeit der Ionen. Es ist bei der Nutzung und Deutung dieser Relation darüber hinaus zu beachten, dass es sich um eine Modellierung der Anregung von Wellen handelt, also von kleinen Störungen ausgegangen wird. Ein Modell, das etablierte Wellenfelder vollständig charakterisieren wollte, müsste die gegenseitige Wechselwirkung von Staubbelle und Plasma berücksichtigen.

Ein mustergültiger Graph der Dispersionsrelation ist für Entladungsparameter, wie sie für den Staubeinschluss in anodischen Plasmen typisch sind, in Abb. 2.5 dargestellt. In der Grafik stellt die durchgezogene Kurve den Realteil der Funktion dar, während die gestrichelte Kurve den Imaginärteil abbildet. Die Achse der Wellenfrequenz ω ist auf die Staubplasmafrequenz normiert und die Achse der Wellenzahl k durch Multiplikation mit der Elektronen-DEBYE-Länge λ_{De} . Es zeigt sich, dass der Imaginärteil der Funktion über ein breites Intervall der Wellenzahlen positiv ist, was auf eine Selbsterregung der Störung mit den zugehörigen Frequenzen hindeutet, die sich aus dem Realteil der Funktion ergeben.

Über die oben angenommene Einschränkung hinaus, dass anregender Ionenwind und Propagationsrichtung parallel seien, wurden auch Staubdichtewellen beobachtet, bei denen dies nicht der Fall war [46, 48, 95]. In diesen Fällen besitzt die Anregung der Wellen in der Regel einen vergrößerten Frequenzumfang. Aus diesem Grunde treten Staubdichtewellen über weite Parameterbereiche in vielen Experimenten im Bereich der staubigen Plasmen auf und wurden auch in verschiedenen Untersuchungen zu anodischen staubigen Plasmen beobachtet [111, 112, 169].

2.2 Physikalische Grundlagen anodischer Plasmen

Der Staubeinschluss ist eine notwendige Bedingung für die Untersuchung stationärer Staubsysteme in Plasmen. In den im Rahmen dieser Arbeit präsentierten Untersuchungen wird der Staubeinschluss mit Hilfe eines anodischen Plasmas realisiert. Aus diesem Grunde sollen zunächst einige grundlegenden Informationen zu anodischen Plasmen gegeben werden, bevor im Anschluss hieran der Staubeinschlussmechanismus erläutert wird.

2.2.1 Eigenschaften und Moden

Die ersten systematischen Untersuchungen zu anodischen Plasmen wurden Anfang der 50er Jahre von MALTER, JOHNSON und WEBSTER durchgeführt [170]. Kern der ersten Arbeit hierzu ist die Unterscheidung und Charakterisierung verschiedener Brennmodi einer Gasentladung in Dioden mit innerer, heißer Kathode. Abhängig vom Anodenstrom an einer positiv vorgespannten Elektrode werden vier Modi unterschieden, die im Folgenden kurz vorgestellt werden sollen.

Anode Glow Mode (AGM)

Der erste Entladungsmodus, der sich bereits für verhältnismäßig kleine Entladungsströme ergibt, ist der „Anode Glow Mode“ (AGM). In diesem Falle beschränkt sich der Bereich, in dem ein Plasma erzeugt wird, auf die unmittelbare Umgebung der Anode. Hintergrund hierfür ist, dass nur im Abstand von etwa einer Abschirmlänge vor der Anode die elektrischen Felder ausreichend stark sind, um Elektronen so sehr zu beschleunigen, dass sie Gasteilchen anregen und ionisieren können. Optisch ist der AGM an einer schwachen Leuchterscheinung unmittelbar an der Anode zu erkennen [170–172].

Ball-of-Fire Mode (BFM)

Wird der Entladungsstrom weiter erhöht, findet eine schlagartige Ablösung der Leuchterscheinung von der Anode statt und die Entladung expandiert in den „Ball-of-Fire Mode“ (BFM). In diesem Entladungsmodus brennt das Plasma in einem ausgedehnten Volumen vor der Anode. Im einfachsten Fall nimmt die Entladung dabei eine Kugelform an [170, 173, 174]. Befindet sich die Entladung in einem homogenen Magnetfeld, so erhalten die Ladungsträger eine Vorzugsrichtung entlang der magnetischen Feldlinien und der „Fireball“ elongiert sich zu einer Zigarrenform (prolates Rotationsellipsoid), einem sogenannten „Firerod“ [175]. Der Ball-of-Fire Mode brennt über einen großen Strombereich stabil. Wird der Entladungsstrom erhöht, so wächst die Größe der Entladung vor der Anode, wird er verringert, so nimmt die Größe ab. Die Untersuchungen dieser Arbeit wurden im BFM durchgeführt.

LANGMUIR Mode (LM)

In Laborplasmen ist die Größe des Entladungsvolumens begrenzt, entsprechend kann der „Fireball“ nicht beliebig wachsen. Ist fast das gesamte Volumen zwischen Anode und Kathode von der Leuchterscheinung erfüllt, bleibt nur ein kleiner Bereich um die Kathode, in dem keine Ionisation stattfindet. Dieser Modus wird „LANGMUIR Mode“ (LM) genannt und ist im Vergleich zu den anderen vorgestellten Modi ausgesprochen instabil. Der LM stellt den Übergang zwischen Ball-of-Fire Mode und Temperature-Limited Mode dar.

Temperature-Limited Mode (TLM)

Der „Temperature-Limited Mode“ (TLM) ergibt sich, wenn sämtliche an der Kathode bereitgestellten Elektronen auf die Anode abfließen, so dass eine Erhöhung des Entladungsstromes an der Anode nicht ohne Weiteres möglich ist. Der Name dieses Modus stammt aus den ursprünglichen Experimenten von MALTER, JOHNSON und WEBSTER, die zur Untersuchung anodischer Plasmen eine thermische Entladung nutzten. Da der Strom von dem emittierenden Material und insbesondere auch von dessen Temperatur abhängt, wurde dieser Name gewählt.

Der Effekt eines TLM – eine obere Grenze für den Entladungsstrom – tritt auch in anderen Systemen auf. Unabhängig von der Art der Primärentladung kann der Strom auf die Anode auf Dauer nicht mehr Ladungsträger umfassen, als von der Primärentladung bereitgestellt werden.

Ein Phänomen, das in Plasmaentladungen auftreten kann, in denen Ströme fließen, ist die Entstehung von Doppelschichten (engl. double layers) [176, 177]. Diese Strukturen stellen in einem Plasma eine effiziente Form der Abschirmung elektrischer Felder dar, da ein hoher Potentialabfall auf kurzer Strecke stattfindet. Doppelschichten entstehen durch die entgegengesetzte Strömung von Elektronen und Ionen entlang der elektrischen Feldlinien und trennen verschiedene Regionen einer Entladung voneinander. In der Regel ist diese Art der Abgrenzung durch eine scharfe Begrenzung der Leuchterscheinung gekennzeichnet. Doppelschichten können auch in anodischen Plasmen auftreten [174, 175] und sogar zum Staubeinschluss genutzt werden [119]. Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit wurden jedoch in einem anodischen Plasma durchgeführt, in dem diese Strukturen nicht festgestellt werden konnten.

2.2.2 Staubeinschluss

Die erste Beobachtung eines Staubeinschlusses in einem anodischen Plasma gelang BARKAN und MERLINO Mitte der 1990er Jahre [119] in einer anodischen Entladung in einer „Q-Machine“. Sie beobachteten dort eine polydisperse Staubwolke im Bereich der Doppelschicht eines „Firerod“. Den Staubeinschluss führten sie auf ein Gleichgewicht von elektrischer Feldkraft und Erdgravitation zurück. Darüber hinaus wurde eine Rotation der gesamten Wolke in $\vec{E} \times \vec{B}$ -Richtung festgestellt, in deren Zusammenhang auch die Rolle des Ionenwindes und der Neutralgasreibung betrachtet wurde. Inzwischen wurden von verschiedenen Gruppen weitere Untersuchungen in anodischen staubigen Plasmen durchgeführt. Ein Schwerpunkt lag hierbei auf dynamischen Prozessen, wie beispielsweise Staumdichtewellen [94, 111, 151, 152, 178], Schockbildung [102, 103, 179, 180] oder auch Vortexströmungen [181].

Für die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit wurde der Staub ebenfalls in einem anodischen Plasma im Experiment MATILDA-II eingefangen. Hierzu wird an einer kleinen, scheibenförmigen Anode im Zentrum einer leicht magnetisierten Entladungssäule eine Sekundärentladung gezündet. Der Staubeinschluss in axialer Richtung wurde ausführlich von TROTTEMBERG *et al.* untersucht [152, 182]. Die Gleichgewichtslage wird in diesem Fall durch ein Kräftegleichgewicht aus elektrischer Feldkraft und Ionenwindkraft festgelegt. Der radiale Einschluss wurde den starken elektrischen Feldern in der anodischen Entladung zugeschrieben. Dem Einfluss der Gravitationskraft wird in dieser Betrachtung eine deutlich untergeordnetere Rolle zugewiesen als bei BARKAN und MERLINO [119].

Dies ist berechtigt, da im vorliegenden Fall der Staub deutlich kleiner ist als dort und hierdurch die Gravitationskraft um mindestens eine Größenordnung kleiner ist als die der einschließenden Kräfte. Eine ausführliche Beschreibung des experimentellen Aufbaus, des Staubeinschlusses und der Ausbildung strömender Staubtori gibt das Kap. 3 dieser Arbeit.

2.3 Zentrale Aspekte der hydrodynamischen Beschreibung von Strömungen

Eine Besonderheit der im Rahmen dieser Arbeit präsentierten Untersuchungen ist, dass es sich bei dem Untersuchungsgegenstand nicht um eine ruhende Staubwolke in einem stationären Confinement handelt, sondern um eine Staubströmung. Klassischerweise ist die Beschreibung von Strömungen ein Teil der Hydrodynamik. In diesem Bereich ist der Untersuchungsgegenstand die Strömung eines kontinuierlichen Fluids. Da im Folgenden Unterschiede und Gemeinsamkeiten des Strömungsverhaltens solcher Fluide und dem granularen Staub als strömendem Medium herausgearbeitet werden sollen, werden in diesem Abschnitt einige zentrale Formeln und Sichtweisen der Hydrodynamik zusammengefasst. Die Ausführungen orientieren sich an dem Lehrbuch *Hydrodynamik und Strukturbildung* von M. BESTHORN [183].

2.3.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung besagt in der Hydrodynamik, dass die Änderung der Dichte ρ einer Größe in einem Volumenelement nur durch Zustrom oder Verlust dieser Größe durch die Volumenoberfläche geschehen kann – eine Dichteänderung kann nicht „aus dem Nichts“ geschehen. Mit der Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} und der Stromdichte $\vec{j} = \rho\vec{v}$ lässt sich dies in allgemeiner Form darstellen als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 . \quad (2.36)$$

Wird nun Inkompressibilität der Strömung angenommen, so bleibt die Dichte jedes „Fluidpartikels“ im Strömungsverlauf konstant. Es gilt also (entsprechend der EULER'schen Betrachtungsweise)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho = 0 . \quad (2.37)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass zur Erfüllung der Eigenschaft der Inkompressibilität entsprechend Gleichung (2.37) die Dichte ρ nicht konstant sein muss. Die Inkompressibilität ist in diesem Sinne also keine Eigenschaft des Fluids selbst, sondern eine Eigenschaft der Strömung.

Unter der Voraussetzung der Inkompressibilität vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (2.36) zu

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.38)$$

bzw. in Zylinderkoordinaten r, φ, z zu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0 . \quad (2.39)$$

Die Divergenzfreiheit des Strömungsfeldes bedeutet, dass es quellenfrei ist.

2.3.2 EULER'sche Gleichungen

Die EULER'schen Gleichungen beschreiben das Strömungsverhalten einer idealen, das heißt reibungsfreien, Flüssigkeit. Zentral für die meisten Betrachtungen ist dabei die Impulsgleichung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \vec{k} . \quad (2.40)$$

In dieser Gleichung bezeichnet \vec{v} das Geschwindigkeitsfeld, p den Druck und ρ die Dichte. \vec{k} bezeichnet eine äußere Beschleunigung, die auf das gesamte Volumen wirkt – in den meisten Fällen ist dies die Schwerkraftbeschleunigung. Die linke Seite der Gleichung ist die substantielle Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes und wird daher „substantielle Beschleunigung“ genannt. Auf der anderen Seite der Gleichung findet sich neben der volumenverteilten Beschleunigung \vec{k} noch die Beschleunigung, die aus einem Druckgradienten entsteht. Ausformuliert in Zylinderkoordinaten (r , φ und z) lautet die Gleichung

$$\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} + k_r \right) \quad (2.41)$$

$$\frac{Dv_\varphi}{Dt} - \frac{v_r v_\varphi}{r} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + k_\varphi \right) \quad (2.42)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + k_z \right) \quad (2.43)$$

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z} . \quad (2.44)$$

Der zuletzt genannte Operator D/Dt bildet die substantielle Ableitung (auch Materialableitung genannt) in Zylinderkoordinaten. Hierbei handelt es sich mathematisch um das totale Differential entlang der betrachteten Trajektorie.

2.3.3 NAVIER-STOKES-Gleichung

Die NAVIER-STOKES-Gleichung(en) gehören zu den zentralen Werkzeugen der Hydrodynamik. Sie stellen eine Erweiterung der EULER-Gleichungen dar, die auch die Viskosität der Flüssigkeiten berücksichtigt. Die NAVIER-STOKES-Gleichung für die Impulsbilanz wird erhalten, indem der Impulsbilanz aus den EULER-Gleichungen noch ein Term hinzugefügt wird:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \left[-\text{grad}(p) + \rho \vec{k} + \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right] . \quad (2.45)$$

Wie bei der EULER-Gleichung steht linksseitig die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit. Neben den bekannten Termen treten rechtsseitig die neuen Summanden $\mu \Delta \vec{v} / \rho$ und $(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) / \rho$ auf. μ bezeichnet die (als konstant vorausgesetzte) dynamische Viskosität des betrachteten Fluids, Δ ist der LAPLACE-Operator und λ die (ebenfalls als konstant angenommene) LAMÉ-Konstante.

Sowohl die EULER-Gleichung als auch die NAVIER-STOKES-Gleichung bilden zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ein System von Differentialgleichungen, aus dem die vier unbekannten Größen \vec{v} (3 Geschwindigkeitskomponenten) und p (der Druck) bestimmt werden können.

2.3.4 Exkurs: Projektionsmethoden

Die numerische Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichung ist in vielen Bereichen von Interesse, beispielsweise im Bereich der Fluidodynamik, der Astrophysik, der Geophysik, im Bereich des maschinellen Sehens oder auch bei der Computervisualisierung von Flüssigkeiten in Computerspielen und Filmanimationen [184]. Projektionsmethoden sind ein Werkzeug, mit dem diese Lösungen ermittelt werden können. ALEXANDRE CHORIN erarbeitete hierzu bereits in den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts ein Konzept [185], auf dem eine Vielzahl weiterer etablierter Methoden aufbaut [184, 186–189]. Insbesondere werden bei diesen Methoden in der Regel die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes und des Druckfeldes voneinander entkoppelt.

Die Kernidee hierfür besteht darin, dass sich gemäß des HELMHOLTZ-Theorems¹ nahezu alle physikalisch relevanten Vektorfelder additiv in einen quellenfreien Anteil, einen rotationsfreien Anteil und einen harmonischen Anteil (quellenfrei und rotationsfrei) zerlegen lassen. Der harmonische Anteil wird in den mathematischen Betrachtungen häufig vernachlässigt, da er in die anderen Felder integriert werden kann, ohne dass sich die Systematik der Methoden verändert – in den einfachsten Fällen stellt er lediglich eine konstante Translationsbewegung dar. Bezogen auf inkompressible Strömungen sind diejenigen Strömungsmoden, denen ein harmonisches Geschwindigkeitsfeld zugrunde liegt, diejenigen mit der geringsten Energie. Die Zerlegung selbst ist bei geeigneten Randbedingungen eindeutig. Damit eine solche Zerlegung grundsätzlich möglich ist, muss ein dreidimensionales Vektorfeld $\vec{V}(r)$ lediglich die Voraussetzungen der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit und der Abnahme zu Null schneller als $1/r$ erfüllen ($\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{V}(r)r = 0$).

Aus physikalischer Sicht interessant ist nun, dass sich ein rotationsfreies Vektorfeld $\vec{V}_{\text{rf}}(r)$ als Gradient eines skalaren Potentials $\Phi(r)$ darstellen lässt, während ein divergenzfreies Feld $\vec{V}_{\text{df}}(r)$ sich als Rotation eines Vektorpotentials $\vec{A}(r)$ schreiben lässt:

$$\vec{V}(r) = \vec{V}_{\text{rf}}(r) + \vec{V}_{\text{df}}(r) = -\nabla\Phi(r) + \nabla \times \vec{A}(r) . \quad (2.46)$$

Somit kann das ursprüngliche Vektorfeld mit Hilfe zweier Potentiale beschrieben werden. Wird nun die Divergenz dieser Gleichung betrachtet, so ergibt sich eine POISSON-Gleichung für das skalare Potential $\Phi(r)$

$$\nabla \cdot \vec{V}(r) = -\nabla \cdot \nabla\Phi(r) + \nabla \cdot \nabla \times \vec{A}(r) = -\Delta\Phi(r) + 0 . \quad (2.47)$$

Sind das ursprüngliche Vektorfeld $\vec{V}(r)$ sowie die Randbedingungen des Problems bekannt, kann mittels dieser Beziehung das Potential $\Phi(r)$ ermittelt werden und anschließend über obige Gleichung (2.46) das divergenzfreie Feld $\vec{V}_{\text{df}}(r)$. Bei der Anwendung des Verfahrens auf die NAVIER-STOKES-Gleichung ist das skalare Potential $\Phi(r)$ mit dem Druck p verknüpft.

Diese Projektionsmethoden sind im Bereich der kontinuierlichen inkompressiblen Strömungen ein mächtiges und weit verbreitetes wissenschaftliches Werkzeug [184]. Zur numerischen Berechnung werden die Fragestellungen in der Regel auf diskrete Gitter übertragen und beispielsweise die Finite Elemente Methode angewendet [186].

¹ Das HELMHOLTZ-Theorem wird häufig auch als HELMHOLTZ-Zerlegung, STOKES-HELMHOLTZ-Zerlegung oder Fundamentalsatz der Vektoranalysis bezeichnet. Im Rahmen der Anwendung in der Fluidodynamik wird auch häufig der Name HELMHOLTZ-HODGE-Zerlegung bzw. HODGE-Zerlegung verwendet. [190]

Auch für den Fall von Strömungen komplexer Plasmen wären die Informationen und Größen, die diese Methode lediglich aus Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes gewinnen würde, eine große Bereicherung. So ließe sich hieraus ein Druckbegriff für diesen Fall ableiten und (In-)Kompressibilitätseigenschaften könnten ermittelt werden. Für den im Rahmen der vorliegenden Dissertation betrachteten Fall eines Staubtorus ist dies jedoch (noch) nicht möglich. Die hier betrachteten strömenden Systeme sind sehr klein, häufig beträgt der Strömungsdurchmesser nur wenige Interpartikelabstände. Aus diesem Grunde liegen Geschwindigkeitsinformationen der Strömung zu jedem Zeitpunkt stets nur für die Partikelpositionen vor. Eine physikalisch sinnvolle Interpolation des aktuellen Geschwindigkeitsfeldes auf Positionen zwischen den Partikeln gibt es nicht. Aus diesem Grunde müsste eine Zerlegung des Vektorfeldes auf den durch die Partikel definierten Positionen geschehen. Die numerischen Methoden, die es zur Zeit für Operationen auf diskreten Vektorfeldern oder auch zur HELMHOLTZ-HODGE-Zerlegung gibt, lassen sich hierauf nicht anwenden – sie haben stets gewisse Ansprüche an die Gittergeometrie, die hier nicht erfüllt werden können [142, 191, 192]. Die Erweiterung der Methoden ist jedoch zur Zeit in verschiedenen Bereichen, wie beispielsweise der Ozeanologie, der Geophysik, der Meteorologie oder auch im Bereich der Computergrafik von großem Interesse [184], so dass künftig mit Entwicklungen entsprechender Methoden zu rechnen ist.

Mit diesen ergänzenden Betrachtungen zu aktuellen Methoden der Hydrodynamik endet die Einführung in die physikalischen Grundlagen des betrachteten Systems. Neben der Vorstellung der zentralen Mechanismen in einem staubigen Plasma wurden insbesondere die Kräfte, die auf Staubpartikel wirken, diskutiert, eine Dispersionsrelation für selbsterregte Staubbichtewellen präsentiert und die zentralen Eigenschaften des anodischen Plasmas erläutert. Da zum Verständnis dieser Arbeit neben der Kenntnis der verwendeten Theorien auch die Kenntnis des experimentellen Aufbaus und der verwendeten Methoden essentiell ist, sollen diese in den beiden folgenden Kapiteln vorgestellt werden.

3 | Toroidale Staubströmungen in schwach magnetisierten anodischen Plasmen

Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit ist eine stationäre, inhomogene toroidale Staubströmung in einem schwach magnetisierten anodischen Plasma. Wie die Anzahl an Attributen zur genauen Beschreibung der Strömung schon erahnen lässt, handelt es sich bei diesem Torus um ein besonderes System, das nur unter speziellen Voraussetzungen auftritt. Daher liegt der Fokus dieses Kapitels auf eben diesem Staubtorus. Es wird zunächst der experimentellen Aufbau zur Realisierung der benötigten Entladungscharakteristika vorgestellt, anschließend wird der Staubeinschluss im anodischen Plasma erläutert und abschließend der Blick auf die Mechanismen gerichtet, die zur Ausbildung der toroidalen Staubströmung führen.

3.1 Experimenteller Aufbau: MATILDA-II

Die Experimente, die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt werden, wurden im Aufbau MATILDA-II durchgeführt. Das namensgebende Akronym leitet sich aus dem Langnamen „**M**agnetized **L**inear **D**ischarge **A**rrangement“ ab, der treffend entscheidende Eigenschaften des Experiments zusammenfasst. Es handelt sich hierbei um eine zylindrische Vakuumkammer mit einer Länge von 104 cm und einem Innendurchmesser von 27 cm. Eine Vielzahl an Flanschen und Fensteröffnungen ermöglicht den Zugang zum Kammerinneren. Der Aufbau ist in Abb. 3.1 in einer Seitenansicht skizziert. Um die Kammer herum sind zehn Magnetfeldspulen angeordnet, die im Innern nach dem HELMHOLTZ'schen Prinzip ein nahezu homogenes Magnetfeld einer Flussdichte von $|B| = 0 \dots 120 \text{ mT}$ induzieren können. Als Arbeitsgas wird in den vorgestellten Untersuchungen Argon bei einem Druck von $p = 3 \dots 15 \text{ Pa}$ verwendet. Das Koordinatensystem für die Betrachtungen definiert sich als rechtshändiges kartesisches System aus der Richtung der Gravitation ($-\vec{e}_y$) und der Hauptachse des Rezipienten in Richtung der magnetischen Flusslinien (\vec{e}_z) (vgl. Abb. 3.1).

Im Inneren der Kammer wird an einem Ende eine primäre Entladung gezündet (in der Grafik am rechten Kammerende). Hierbei handelt es sich um eine kapazitiv gekoppelte Hochfrequenzentladung ($f_{\text{HF}} = 27,12 \text{ MHz}$) zwischen einer getriebenen Edelstahlelektrode und einem geerdeten Gitter, die bei niedriger Leistung betrieben wird ($P_{\text{HF}} = 1 \dots 10 \text{ W}$).

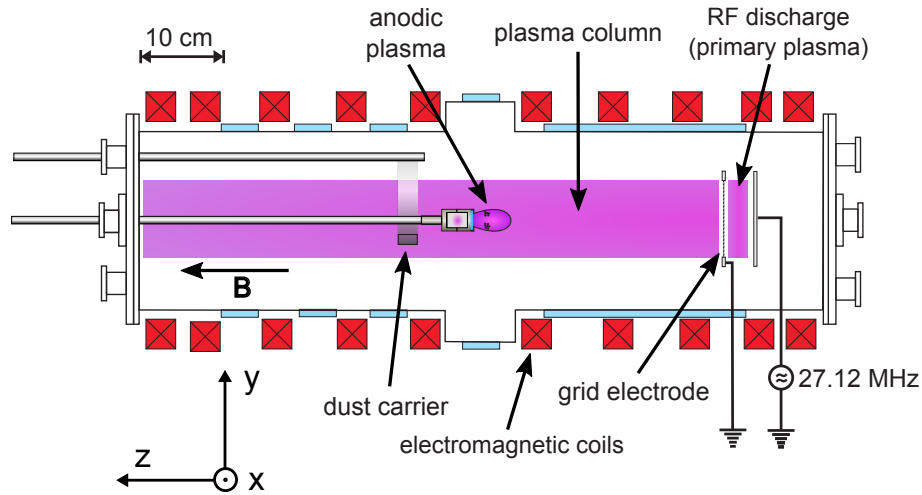


Abbildung 3.1: Skizze des experimentellen Aufbaus MATILDA-II (**M**agnetized **L**inear **D**ischarge **A**rrangement) in einer Seitenansicht. Das zugrunde liegende Koordinatensystem ist links unten eingezeichnet. Der zylindrische Rezipient ist 104 cm lang und besitzt einen Durchmesser von 27 cm.

Typische Entladungsparameter für den Staubeinfang der im Folgenden präsentierten Experimente sind in Tab. 3.1 zusammengefasst. Bei diesen Parametern sind die Elektronen stark magnetisiert (HALL-Parameter $H_e > 1$) und folgen daher dem axialen Magnetfeld, so dass sich das Plasma entlang der Kammerhauptachse zu einer Säule ausdehnt. Die Ionen werden lediglich leicht magnetisiert ($H_i < 1$), so dass ihre Hauptdriftrichtung der Richtung der elektrischen Feldlinien entspricht. Die Staubpartikel bleiben von dem Magnetfeld quasi unbeeinflusst ($H_d \ll 1$).

Zentral in der Primärplasmasäule wird die Sekundärentladung betrieben. Hierbei handelt es sich um ein Gleichspannungsplasma, dass an einer positiv vorgespannten Anode zündet. Die Entladung wird im Ball-of-Fire Mode betrieben (vgl. Abschn. 2.2.1). Abbildung 3.2 zeigt eine Skizze der Anodenhalterung sowie das anodische Plasma im Detail.

Tabelle 3.1: Typische Experimentparameter

Parameter	Variable	Wert
Druck	p	5 ... 15 Pa
HF-Leistung	P_{HF}	3 ... 10 W
Anodenspannung	U_A	50 ... 60 V
Anodenstrom	I_A	1,5 ... 15 mA
Magnetische Flussdichte	B	10 ... 20 mT
Partikelmateriale		Melaminformaldehyd
Partikelradius	r_d	$\approx 0,5 \mu\text{m}$
Elektronendichte	n_e	$\approx 10^{15} \text{m}^{-3}$
Ionendichte	n_i	$\approx n_e$
Elektronentemperatur	T_e	$\approx 3 \text{eV}$
Ionentemperatur	T_i	$\approx 0,1 \text{eV}$

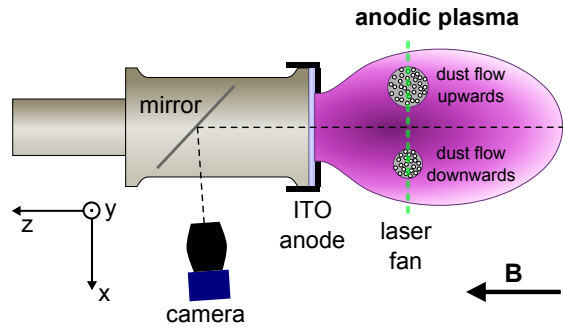


Abbildung 3.2: Skizze des Anodenträgers und des anodischen Plasmas in Aufsicht (vgl. Koordinatensystem). Die eingeschlossene Staubwolke kann mittels eines Laserfächers beleuchtet und über den Spiegel hinter der elektrisch leitenden und optisch transparenten ITO-Anode (Indiumzinnoxid) beobachtet werden.

Die Anodenhalterung ist entlang der Zentralachse der Vakuumkammer verschiebbar. Die Anode selbst ist aus ITO-beschichtetem Glas gefertigt. Indiumzinnoxid (engl.: indium tin oxide, ITO) ist elektrisch leitend und optisch transparent. Durch Verwendung dieses Materials ist es möglich, mit Hilfe eines Umlenkspiegels hinter der Anode videomikroskopische Aufnahmen in Durchsicht durch die Anode anzufertigen („End-On View“). Die Anodenspannung beträgt in der Regel $U_A = 40 \dots 120 \text{ V}$ bei Anodenströmen von $I_A = 1 \dots 20 \text{ mA}$.

Mit Hilfe eines Staubträgers können die Partikel in den Entladungsbereich des anodischen Plasmas gefahren werden. Bei dem Staub handelt es sich um monodisperse Melaminformaldehydkügelchen mit einem Durchmesser von $2r_d = (0,97 \pm 0,05) \mu\text{m}$ mit einer Massendichte von $\rho_d = 1514 \text{ kg m}^{-3}$.

Die Staubwolke im anodischen Plasma kann mit Hilfe eines vertikalen Laserfächers (Wellenlänge: $\lambda_L = 532 \text{ nm}$, Leistung: $P_L = 0 \dots 2000 \text{ mW}$) beleuchtet werden. Hierfür wird in der Regel der Fächer parallel zur Anode ausgerichtet und lediglich ein dünner Schnitt der Staubwolke illuminiert. Auf diese beleuchtete Ebene wird die Kamera fokussiert, so dass die Staubpartikel in der Aufnahme einzeln aufgelöst werden können.

Über Zugänge am rechten Kammerende können darüber hinaus Sonden zur Diagnostik oder Manipulation am anodischen Plasma eingeführt werden. Die im Rahmen dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse machen hiervon jedoch keinen Gebrauch.

3.2 Staubeinschluss in MATILDA-II

Die grundlegenden Untersuchungen zum Staubeinschluss im anodischen Plasma des Experiments MATILDA-II wurden von TROTTENBERG *et al.* durchgeführt [152, 182]. Mit Hilfe von Sondenmessungen konnte die Potentialstruktur des anodischen Plasmas bestimmt werden [vgl. Abb. 3.3 (a)] und so der axiale Staubeinschluss auf ein Kräftegleichgewicht aus elektrischer Feldkraft und Ionenwindkraft zurückgeführt werden.

Das elektrische Feld zeigt stets von der Anode weg, im eigentlichen Fireball bzw. Firerod nach außen. Da der Staub negativ geladen ist, führt dies zu einer Attraktion entgegen der Feldlinienrichtung hin zu der Anode [vgl. Abb. 3.3 (b), gestrichelte Linie]. In genau der entgegengesetzten Richtung werden Ionen beschleunigt, so dass der Ionenwind der attraktiven Kraft antiparallel entgegengerichtet ist (Punkt-Strich-Linie). Bei geeigneter Staubgröße ergibt sich somit ein Einschlusspotential, in dem der Staub vor der Anode eingefangen werden kann.

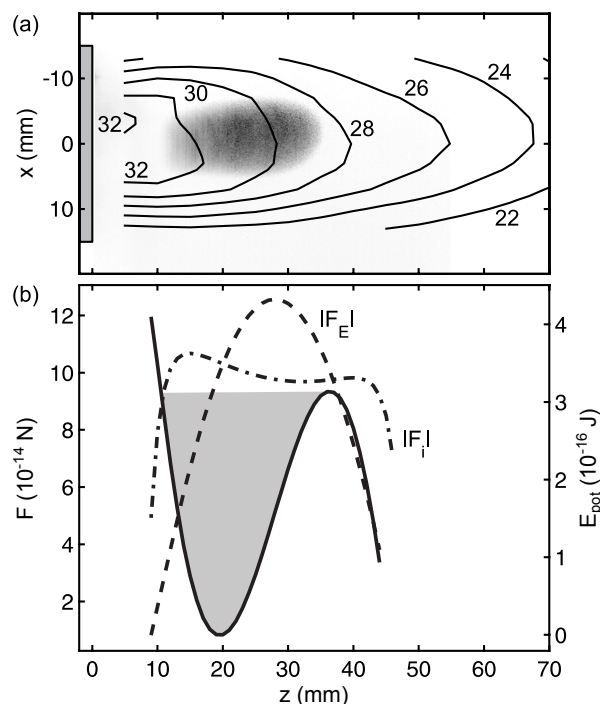


Abbildung 3.3: Betrachtung des Staubeinschlusses in axialer Richtung im anodischen Plasma des Experiments MATILDA-II. (a) Zweidimensionaler, horizontaler Schnitt durch das anodische Plasma. Am linken Rand ist die Anode in grau gekennzeichnet. Der dunkle Bereich vor der Anode ist eine videomikroskopische Aufnahme der Staubwolke. Die Konturlinien geben das Potential in Volt gegenüber dem geerdeten Rezipienten an. (b) Verlauf der einschlussbildenden Kräfte (linke Ordinate) und des Einschlusspotentials (rechte Ordinate) entlang der zentralen Achse. Die elektrische Feldkraft ist gestrichelt, die Ionenwindkraft als Punkt-Strich Linie eingezeichnet. Die durchgezogene Linie stellt die potentielle Energie im Einschluss dar, wie sie sich aus der Summe der Kräfte ergibt. Der grau schattierte Bereich visualisiert den maximalen Bereich, in dem der Staubeinfang möglich ist. (Abb. mit Genehmigung und Anpassung aus [182])

Die aus diesen Kräften berechnete (nicht konservative) potentielle Energie entlang der Hauptachse ist in Grafik 3.3 (b) als durchgezogene Linie aufgetragen. Der Bereich, in dem nach diesen Berechnungen Staubeinfang möglich sein sollte, stimmt hierbei gut mit dem experimentellen Befund überein. Der radiale Einschluss wurde starken elektrischen Feldern in dieser Richtung in der anodischen Entladung zugeschrieben. Dem Einfluss der Gravitationskraft wird in dieser Betrachtung eine untergeordnetere Rolle zugewiesen, da die einschließenden Kräfte diese um mindestens eine Größenordnung übersteigen.

3.3 Toroidale Staubströmungen

TROTTEBERG *et al.* berichteten im Jahr 2005 von ersten Beobachtungen einer torusförmigen Staubwolke [109, 110] und äußerten den Verdacht, dass es sich bei dem staubfreien Bereich im Zentrum der Entladung um ein Void handeln könnte.

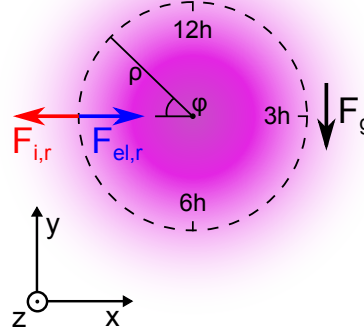


Abbildung 3.4: Vereinfachte Darstellung zur Visualisierung des radialen Staubeinschlusses. Ionenwindkraft und entgegengerichtete elektrische Feldkraft bilden eine stabile, ringförmige Gleichgewichtslage für die Partikel aus.

In unmagnetisierten staubigen Plasmen tritt ein solches Void auf, wenn im Innern einer Entladung die nach außen gerichtete Ionenwindkraft die nach innen gerichtete elektrische Feldkraft überschreitet und der Staub „nach außen geblasen“ wird. Der Ursprung dieses Verhaltens liegt in der unterschiedlichen Skalierung der beteiligten Kräfte mit der Driftgeschwindigkeit der Ionen (vgl. Abschn. 2.1.3). Da das ambipolare Feld des Plasmas vom Zentrum zum Rand der Entladung hin zunimmt, nimmt ebenfalls die Driftgeschwindigkeit der Ionen in eben dieser Richtung zu und es kann sich eine stabile Gleichgewichtslage für den Staub ausbilden. Diese beschreibt näherungsweise den Ort der Voidkante. Voids wurden häufig bei Untersuchungen von staubigen Plasmen unter Schwerelosigkeit beobachtet [69, 72, 73], treten aber ebenfalls in Nanostaubwolken auf [66, 193], in Experimenten, in denen die Erdgravitation durch Thermophorese kompensiert wird [67], oder auch um LANGMUIR-Sonden herum [70, 194, 195].

Infolge dieser ersten Beobachtung eines Staubtorus untersuchten PILCH *et al.* dieses Phänomen detaillierter und entwickelten eine Modellvorstellung, die in den vergangenen Jahren sukzessive verfeinert wurde [111–118]. Den Kern der Modellvorstellung bildet die Übertragung des Konzepts eines Voids auf die Situation des Staubtorus [112, 158, 196]. Durch detaillierte Sondenmessungen wurden elektrische Feldkraft und Ionenwindkraft in radialer Richtung bestimmt. Es wurde gezeigt, dass bei ausreichend hoher Ionendichte die Ionenwindkraft nahe der Zentralachse der Entladung die elektrische Feldkraft auf die Partikel übersteigt und es so zur Bildung eines Voids kommt. Die tatsächliche Gleichgewichtslage der Kräfte liegt dann aufgrund der rotationssymmetrischen Geometrie des Aufbaus ringförmig um die Zentralachse. Diese Situation ist schematisch in Abb. 3.4 in einem „End-On View“ dargestellt. Da die beiden Kräfte (radiale Ionenwindkraft und elektrische Feldkraft), die das Confinement bilden, die Gravitationskraft um mehr als eine Größenordnung übertreffen, spielt letztere für die Ausformung der Gleichgewichtslage nur eine untergeordnete Rolle. Das zugrunde gelegte kartesische Koordinatensystem, das von der Gravitationsrichtung und der Richtung der magnetischen Feldlinien vorgegeben wird, ist links unten dargestellt. Zur Orientierung in Bezug auf das ringförmige Confinement hat sich in den vergangenen Jahren eine Zylinderkoordinatendarstellung etabliert. Dieses Koordinatensystem beinhaltet den Abstand ρ von der Zentralachse, einen Winkel φ , der in Stunden gemessen wird und der 12h-Einteilung eines klassischen Uhrenziffernblattes entspricht, und der unveränderten z -Komponente in Achsenrichtung.

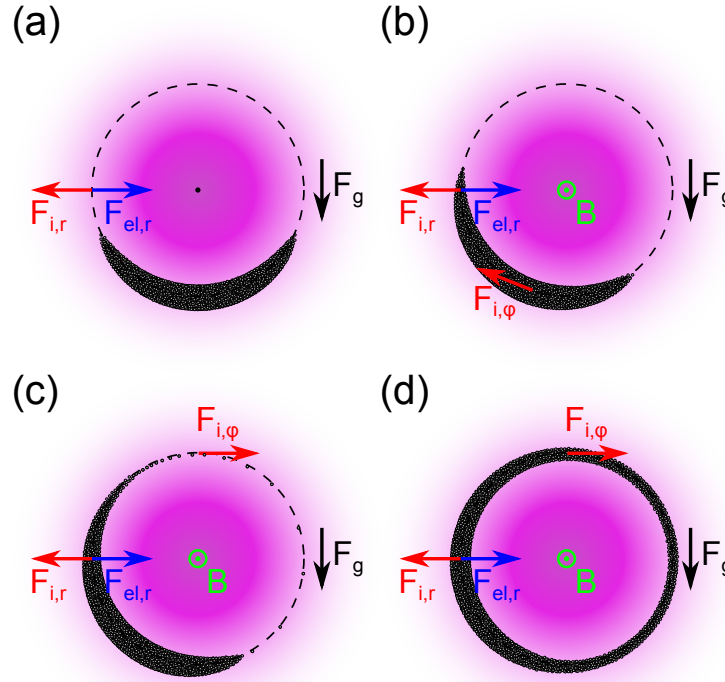


Abbildung 3.5: Vereinfachte Darstellung der Entstehung eines Staubtorus. Ionenwindkraft und elektrische Feldkraft bilden ein stabiles, ringförmiges Confinement für die Partikel. Aufgrund der Erdgravitation sedimentieren die Partikel in die Fallensohle. (a) Situation ohne Magnetfeld und damit ohne Toroidalanteil des Ionenwindes. (b) Situation mit Magnetfeld in axialer Richtung und toroidalem Ionenwind von $F_{i,\varphi} = 0,4 F_g$. Die Gleichgewichtslage der Staubwolke wird entlang des Confinementrings verschoben. (c) Bei stärkerem toroidalem Ionenwind ($F_{i,\varphi} = 0,6 F_g$) können einzelne Partikel die kritische Gleichgewichtslage überwinden und strömen entlang des Confinements. (d) Bei ausreichend starkem toroidalem Ionenwind (dargestellt für $F_{i,\varphi} = 1,2 F_g$) rotiert die gesamte Staubwolke. Es etabliert sich ein inhomogenes Strömungsfeld, da in der linken Torushälfte Gravitationskraft und antreibender Ionenwind antiparallel zueinander wirken, während sie sich auf der rechten Seite addieren. [Zentrale Simulationsparameter der Staubverteilungen: Partikelzahl $N = 4096$, Fallenfrequenz $\omega_\rho = \omega_z = 250 \text{ s}^{-1}$, EPSTEIN-Koeffizient $\beta = 100 \text{ s}^{-1}$.]

Der Einfluss der Gravitation auf dieses System wird ersichtlich, wenn Partikel in das anodische Plasma eingebracht werden. Abb. 3.5 (a) zeigt diese Situation in einer vereinfachten Modellvorstellung zunächst ohne Magnetfeld¹. Die Partikel werden in der ringförmigen Falle eingeschlossen, sinken jedoch in die Fallensohle. Wird nun ein Magnetfeld angelegt, so erhält der Ionenwind aufgrund der LORENTZ-Kraft eine HALL-Komponente in $\vec{E} \times \vec{B}$ -Richtung entlang des Confinements. Ist diese toroidale Ionenwindkraft klein, so verschiebt sie die Staubwolke entlang des Ringeinschlusses, bis sich aufgrund der Steigung eine neue Gleichgewichtslage einstellt [s. Abb. 3.5 (b), dargestellt für $F_{i,\varphi} = 0,4 F_g$].

¹ Die Vereinfachung bezieht sich darauf, dass im Laborexperiment Parameter nicht einzeln variiert werden können. Da die Plasmaparameter interdependent sind, hat jede Änderung einer Regelgröße Einfluss auf mehrere Entladungsparameter, Confinement und Antrieb.

Ein vergleichbarer Einfluss auf Staubcluster in Magnetfeldern wurde auch in anderen Experimenten beobachtet. So berichteten KONOPKA *et al.* von der Rotation eines zweidimensionalen Staubclusters und schrieben der HALL-Komponente des Ionenwindes den Antrieb zu [63]. In starken Magnetfeldern konnte von AMATUCCI *et al.* sogar die Gyrationbewegung der Partikel direkt beobachtet werden [197]. Auch die Rotation ausgedehnter kompakter Staubcluster in magnetisierten anodischen Plasmen wurde beschrieben und experimentell untersucht [119, 198, 199].

Wird die Toroidalkomponente der Ionenwindkraft weiter erhöht, so beginnen zunächst einzelne Partikel entlang des Confinements zu strömen. In Abb. 3.5 (c) ist die Situation für einen Antrieb von $F_{i,\varphi} = 0,6 F_g$ dargestellt. Da der Schwerpunkt der ruhenden Staubpopulation entlang des Confinements verschoben wird, trägt die kollektive Wechselwirkung der Partikel bereits bei diesem Antrieb, der unterhalb der Gravitationskraft liegt, einige Partikel über die kritische Gleichgewichtslage. Diese Partikel steigen langsam in der linken Torushälfte gegen die Gravitation auf und strömen auf der rechten Torusseite, auf der Ionenwindkraft und Gravitationskraft parallel wirken, schnell abwärts [114, 115].

Bei noch stärkerer Ionenwindkraft in toroidaler Richtung ergibt sich ein voll ausgebildeter Staubtorus, in dem alle Partikel in toroidaler Richtung entlang des Confinements strömen. Abbildung 3.5 (d) zeigt einen solchen Torus für einen Antrieb von $F_{i,\varphi} = 1,2 F_g$. In diesem Falle bildet sich ein stationäres, inhomogenes Strömungsfeld, in dem der Staub langsam die linke Torushälfte hinaufströmt und schnell auf der rechten Seite hinabströmt. Diese Art von Staubströmung zeigt abhängig von den Experimentparametern verschiedene Eigenschaften, die im Laufe dieser Arbeit thematisiert werden.

Drei zentrale makroskopische Eigenschaften dieser voll ausgebildeten Strömung, die REICHSTEIN *et al.* untersucht und beschrieben haben [113–118, 200], sind im Folgenden kurz zusammengefasst.

Aufgrund der effektiven Kühlung der Staubströmung durch die Neutralgasreibung relaxiert die laminare Staubströmung in konzentrische Schalen. Mittels LANGEVIN-Dynamik-Simulationen konnte gezeigt werden, dass die Partikel in der Strömung nicht zufällig verteilt sind, sondern dass es bevorzugte Bereiche gibt, in denen sie strömen. Diese Bahnen liegen (im Strömungsquerschnitt gesehen) auf konzentrischen Schalen [115]. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 3.6 gezeigt. Die zugrunde liegenden Simulationsdaten entsprechen der Situation aus Abb. 3.5 (d). Gezeigt ist ein Histogramm der Partikeldurchtritte durch eine Querschnittsebene im Bereich der 9:00 h-Position. REICHSTEIN zog bezüglich dieses Verhaltens Parallelen zu statischen YUKAWA-Systemen, in denen Schalenbildung ein durchaus verbreitetes Phänomen ist, wies aber auch darauf hin, dass die Beobachtung eines Kristallisationsprozesses in einem strömenden, stark gekoppelten System ein selten anzutreffender Untersuchungsgegenstand ist. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass die effektive Kühlung durch das Neutralgas zu relativ geringen kinetischen Temperaturen des Staubes führt [vgl. Gleichung (2.26)], was eine hohe Kopplung der Partikel begünstigt. Eine Folge hiervon ist, dass eine ungestörte (laminare) Staubströmung trotz der Krümmung der Bahn in der Regel unverschert ist [116].

Die Beschleunigung der laminaren Strömung durch die Erdgravitation führt zu strukturellen Phasenübergängen. Die Geschwindigkeitszunahme der Partikel resultiert zunächst in einer Vergrößerung des Interpartikelabstandes in Strömungsrichtung

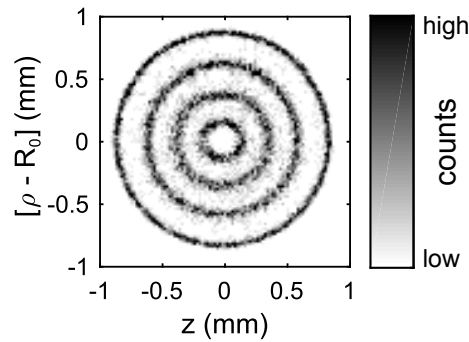


Abbildung 3.6: Beispiel für die Schalenbildung in der laminaren Strömung eines simulierten Staubtorus. Dargestellt ist die Durchtrittshäufigkeit von Partikeln durch eine Querschnittsfläche an der 9:00 h-Position der Strömung aus Abb. 3.5 (d).

und damit in einer Verringerung des YUKAWA-Potentials. Aus diesem Grund verkleinert sich der Strömungsquerschnitt und Schalen können zusammenströmen, so dass mit der Beschleunigung der Staubströmung die Anzahl der Schalen abnimmt [116]. REICHSTEIN führte aus, dass diese Umordnungsprozesse aufgrund der hohen Dämpfung durch die Neutralgasreibung auf relativ kurzen Zeitskalen¹ vonstattengehen, so dass sich das System im Bereich der laminaren Strömung zu jeder Zeit in einem lokalen Gleichgewichtszustand befindet [116].

Der Symmetriebruch der Strömung durch die Erdbeschleunigung führt zur spontanen Ausbildung von Instabilitäten. Die Asymmetrie der Kraft auf die Staubpartikel, die durch die Erdgravitation zustande kommt, führt zu einer langsamen Aufwärtsströmung in der linken Torushälfte und einer schnellen Abwärtsströmung auf der rechten Seite. Insgesamt ist über weite Parameterbereiche hierdurch eine erhöhte, langsam strömende Staubmenge im unteren Torusbereich zu beobachten. Diese Staubansammlung stellt für die schnell anströmenden Partikel ein Hindernis dar [115]. Abhängig von der Neutralgasreibung können hier zwei unterschiedliche Instabilitäten auftreten: Bei geringer Reibung ist die schnelle Hauptströmung fliehkraftbedingt von der Confinementhauptachse nach außen versetzt. Auf diese Weise kommt es zu einem Umströmen der langsamen Staubpopulation im Fuße des Confinements. Diese räumliche Aufteilung in eine schnelle Strömung an der Außenseite und eine langsame oder gar zurückströmende Population an der Innenseite führt zu einer starken Verscherung des Strömungsfeldes an der Grenzfläche dieser beiden Bereiche, so dass hier KELVIN-HELMHOLTZ-Instabilitäten auftreten können. Im Falle erhöhter Reibung trifft die schnelle Staubströmung zentral auf die langsame oder ruhende Staubpopulation im Fuße des Torus. Durch die elektrostatische Wechselwirkung mit diesem Hindernis kann sich ein stehender Schock ausbilden [115]. Der Übergang zwischen den zwei geschilderten Fällen geschieht über Mischformen der beiden Instabilitäten. Für starke Antriebe verringert sich der Einfluss der Gravitation und die relative Geschwindigkeitsmodulation nimmt ab. Auf diesem Wege kann die Gesamtströmung in einen laminaren Zustand ohne Instabilitäten übergehen [117].

¹ „kurz“ im Vergleich zur Umlaufzeit der Partikel um den Torus

In diesem Kapitel wurden das Experiment MATILDA-II und der Staubtorus mit seinen Eigenschaften als Untersuchungsgegenstand vorgestellt. Der Mechanismus, der zum Staubeinschluss in Torusform führt, wurde erläutert und es wurde der toroidale Antrieb charakterisiert. Darüber hinaus wurden zentrale Strömungsmodi der Staubströmung erläutert. Obwohl die zugrunde liegende Strömungsgeometrie auf den ersten Blick verhältnismäßig kompliziert erscheinen mag und die experimentelle Umsetzung eines gewissen Aufwandes bedarf, so sei darauf hingewiesen, dass es sich bei dem Staubtorus um ein – für die Untersuchung von Staubströmungen – ausgesprochen geeignetes System handelt:

Der Staubtorus stellt ein (bezogen auf die Teilchen) geschlossenes, dreidimensionales System dar, so dass stets eine konstante Anzahl an Partikeln strömt – es gibt keine Unsicherheiten in Bezug auf Zu- oder Abnahme der Staubmenge.

Das sich einstellende Strömungsfeld ist stationär. Dem System kann also stets ausreichend Zeit gegeben werden, in einen Gleichgewichtszustand zu gelangen – unabhängig von den Anfangsbedingungen. Darüber hinaus werden hierdurch lange Untersuchungszeiten möglich, die eine gute Statistik ermöglichen.

Die Strömung ist inhomogen, so dass es möglich ist, Untersuchungen zu beschleunigen, konstanten und verzögerten Strömungen in ein und demselben System durchzuführen. Da die Inhomogenität durch die Erdgravitation verursacht wird, ist diese zudem perfekt zeitstabil.

Die Möglichkeit zur gleichzeitigen Untersuchung der unterschiedlichen Strömungsabschnitte garantiert identische Bedingungen. Unsicherheiten, die unabhängige Messungen in Bezug auf Identität der Plasmabedingungen in sich bergen, werden vermieden.

Das System lässt sich mit nur wenigen Vereinfachungen modellieren, so dass eine gute Übertragbarkeit vom Experiment auf Computersimulationen erreicht werden kann und umgekehrt (vgl. Abschn. 4.3).

All diese Aspekte sind sinnvolle Forderungen an eine akkurate Untersuchung von Strömungen und Strömungsphänomenen in staubigen Plasmen. Dennoch stellt der Staubtorus derzeit das einzige System dar, das all diese Aspekte erfüllen kann. Im folgenden Kapitel sollen nun die Methoden vorgestellt werden, mit denen die Staubströmung analysiert wird, zum einen im Laborexperiment, zum anderen durch LANGEVIN-Dynamik-Simulationen.

4 | Untersuchungs- und Analysemethoden

Für die Untersuchung und Charakterisierung der toroidalen Staubströmung werden zwei komplementäre Ansätze verfolgt. Den ersten Ansatz bilden Laborexperimente. Die Primärdaten aus diesen Untersuchungen sind in der Regel videomikroskopische Aufzeichnungen der Staubströmung mittels Hochgeschwindigkeitskameras. Eine wichtige Aufgabe ist es, aus diesen Daten Partikelpositionen und -geschwindigkeiten zu extrahieren, um beispielsweise Strömungsfelder darzustellen und Rückschlüsse auf wirkende Kräfte und auftretende Effekte ziehen zu können. Hierfür werden vor allem Techniken aus der Fluidmechanik verwendet, unter anderem „Particle Tracking Velocimetry“ (PTV) und „Particle Image Velocimetry“ (PIV), die inzwischen auch im Feld der staubigen Plasmen zu den Standardwerkzeugen gehören. Da experimentelle Untersuchungen jedoch stets technischen und sachlichen Beschränkungen unterliegen, auf die im folgenden Unterkapitel genauer eingegangen wird, ist eine vollständige Charakterisierung der Strömung allein auf Basis der videomikroskopischen Daten nicht möglich.

Aus diesem Grunde werden die Untersuchungen von numerischen Experimenten mittels LANGEVIN-Dynamik-Simulationen (LD) begleitet. Diese Simulationen bilden den zweiten Ansatz für die Untersuchung der Staubströmung. Auch diese Technik ist im Forschungsfeld zu einem Standard geworden, da sie die Dynamik eines Vielteilchensystems, wie es ein staubiges Plasma ist, auf dem kinetischen Level zu beschreiben vermag. Der mit der Vielteilchenwechselwirkung verbundene Rechenaufwand ist mit Hilfe parallelisierter Rechenstrukturen, wie sie beispielsweise durch die hier verwendete CUDA™ Architektur von NVIDIA® bereitgestellt wird, effizient handhabbar, so dass die Simulationen auf geeignet ausgestatteten Arbeitsplatzcomputern durchführbar sind.

Laborexperimente und Simulationen bilden zusammen eine sich gegenseitig befruchtende Einheit zur Beschreibung und Untersuchung der Staubströmungen. So wurden in der Vergangenheit Phänomene aus dem Laborexperiment auf das simulierte System übertragen, das wiederum Phänomene und Strömungseigenschaften zeigte, die daraufhin gezielt im Laborexperiment nachempfunden werden konnten.

Im vorliegenden Kapitel sollen zunächst die Methoden erläutert werden, die im Rahmen der Untersuchungen am Laborexperiment zum Einsatz kommen. Im zweiten Abschnitt folgt eine kurze Beschreibung der LANGEVIN-Dynamik-Simulationen und der Methoden zur Auswertung der numerisch erhaltenen Daten.

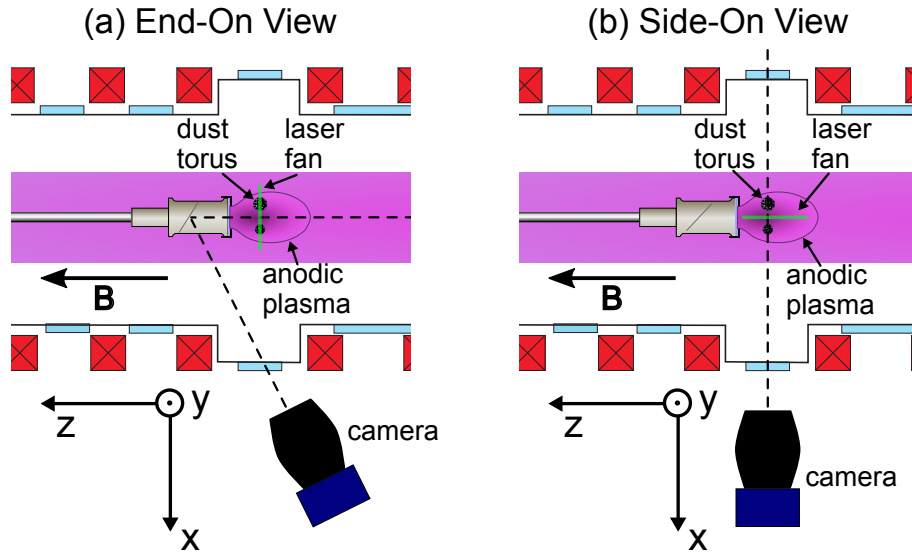


Abbildung 4.1: Die zwei zum Einsatz kommenden Beobachtungsgeometrien in Aufsicht. (a) End-On View auf den Staubtorus. Der Laserfächer (grün) wird orthogonal zur z-Achse auf die zentrale Strömungsebene des Torus justiert. Auf diesem Wege kann der vollständige ringförmige Strömungsverlauf in der Symmetrieebene beobachtet werden. (b) Side-On View. In dieser Geometrie schneidet der Laser den Torus an der 12:00h- und der 6:00h-Position. Das Kamerabild zeigt die entsprechenden Strömungsquerschnitte.

4.1 Experimentelle Untersuchungen

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf der Untersuchung der Partikeldynamik in toroidalen Staubströmungen. Aus diesem Grunde ist die Kenntnis der zeitabhängigen Partikelpositionen und -geschwindigkeiten von zentraler Bedeutung. Diese Daten können auf verschiedene Weisen aus geeigneten Videodaten gewonnen werden.

Die Aufnahme der Videos geschieht mit Hilfe von Hochgeschwindigkeitskameras. Hierzu wird eine dünne Schicht der Staubwolke mit Hilfe eines Laserfächers ausgeleuchtet. Da der Partikelradius um ein Vielfaches kleiner ist als der Interpartikelabstand, ist die Staubwolke hochtransparent und Abschattungseffekte treten praktisch nicht auf. Bei gut justierter Beobachtungsgeometrie kann eine scharfe Abbildung der beleuchteten Ebene mit hoher räumlicher und zeitlicher Auflösung erreicht werden, die eine genaue Analyse der Partikeldynamik zulässt¹. In der vorliegenden Arbeit werden Videoaufnahmen in zwei verschiedenen Beobachtungsgeometrien analysiert:

End-On View Die erste hier vorgestellte Beobachtungsgeometrie ist der End-On View. Mit Hilfe eines Umlenkspiegels wird ein vollständiger Torusschnitt beobachtet. Ist die Beleuchtungsebene sauber justiert, so kann ein vollständiger staubgefüllter Ring beobachtet werden, in dem der Staub im Uhrzeigersinn strömt. Eine Skizze dieser Geometrie ist in Abb. 4.1 (a) gezeigt.

¹ Die videomikroskopischen Aufnahmen wurden mit Hilfe einer Mikrotron EoSens MC1362 Kamera angefertigt. Hierbei handelt es sich um eine Schwarz-Weiß-Kamera mit 8 Bit bzw. 10 Bit Farbtiefe mit einer maximalen Auflösung von 1280×1024 Pixeln bei einer Bildaufnahmerate von 506 fps (frames per second). Durch die Wahl eines Bildausschnittes kann die Aufnahmerate weiter erhöht werden.

Side-On View Der Side-On View ergibt sich durch lediglich kleine Veränderungen am experimentellen Set-up und ermöglicht es, zwei Strömungsquerschnitte zu beobachten [siehe Abbildung 4.1 (b)]. Im Gegensatz zum End-On View wird hierzu der Laserfächer um 90° um die y-Achse gedreht und die Kamera orthogonal auf die Beleuchtungsebene ausgerichtet. Auf diesem Wege werden die Torusquerschnitte bei der 12:00 h- und 6:00 h-Position direkt beobachtbar.

Die Ausgabe der Videodaten erfolgt in der Regel in Form unkomprimierter Einzelbilder, die anschließend mit Hilfe der MathWorks[®]-Software MATLAB[®] weiter verarbeitet werden können.

4.2 Analyseverfahren für experimentelle Daten

Erste Untersuchungen zur Visualisierung von Strömungen wurden bereits im Jahre 1905 von PRANDTL durchgeführt [201]. Zum Studium der Umströmung von Hindernissen versetzte er Wasser mit Eisenglimmer, so dass beispielsweise „*Wirbel durch einen eigentümlichen Glanz hervor*“ traten [201]. Hiervon ausgehend wurden weitere Visualisierungsmethoden in der Fluidodynamik entwickelt. Zu nennen ist hier beispielsweise das gezielte Einbringen von Färbemitteln in Flüssigkeitsströmungen, so dass Stromlinien farbig dargestellt werden. Auf diesem Wege untersuchte TANEDA z. B. Wirbelstraßen [202]. Im Falle der Aerodynamik werden statt der Färbemittel Rauchlinien in Windkanälen eingesetzt, mit denen z. B. das Umströmen von Flugzeugflügeln visualisiert wird [203].

Bei der Auswertung der Videodaten in den hier vorgestellten Untersuchungen kommen vor allem zwei Techniken zum Einsatz, die auf die Verfolgung von Partikeln ausgelegt sind: Die „Particle Image Velocimetry“ (PIV) und die „Particle Tracking Velocimetry“ (PTV). Beide Verfahren wurden aus dem Bereich der Fluidmechanik entliehen und gehören inzwischen zu den Standardwerkzeugen im Bereich der staubigen Plasmen. In diesem Abschnitt soll daher lediglich das grundlegende Konzept der zwei Techniken skizziert werden, auf eine ausführliche Erläuterung der programmiertechnischen Umsetzung wird mit dem Verweis auf entsprechende (Fach-)Literatur¹ an dieser Stelle verzichtet.

Für alle Verfahren zur Partikelerkennung und -verfolgung gilt: Je besser die Rohdaten – im vorliegenden Fall also die Videoaufzeichnungen –, desto besser das Ergebnis. Wichtige Aspekte der Qualität sind hierbei unter anderem ein ausreichender Abstand zwischen den Partikeln auf einem Einzelbild, ein möglichst hoher Kontrast der Partikel gegenüber dem Hintergrund sowie eine hohe zeitliche Auflösung. Der erste Aspekt ist in einem staubigen Laborplasma in der Regel gegeben, da die Partikel sehr klein gegenüber dem Interpartikelabstand sind und auch die Dicke der Beleuchtungsebene kleiner als der Interpartikelabstand gewählt wird. Der zweite Aspekt steht häufig in Konflikt mit dem dritten Aspekt, da eine höhere Aufnahmegeschwindigkeit kürzere Belichtungszeiten zur Folge hat. Diesem Problem kann mit einer höheren Beleuchtungsintensität begegnet werden, jedoch ist grundsätzlich darauf zu achten, dass es durch Laserreflexe oder Streulicht zu einem schwachen Kontrastverhältnis kommen kann. Um den Einfluss letzterer Effekte zu reduzieren, werden die Einzelaufnahmen in der Regel durch ein Offsetbild korrigiert. Dies ist entweder eine Aufnahme bei identischen Bedingungen ohne Partikel oder ein über die gesamte Serie gemittelt Bild.

¹Literatur zur PIV: [204–211], Literatur zur PTV: [205, 212–216]

Die Aufnahmegeschwindigkeit selbst unterliegt meist technischen Beschränkungen, da insbesondere die Bandbreite der Datenübertragung einen „Flaschenhals“ bildet. Für Aufnahmen höherer zeitlicher Auflösung kann im vorliegenden Fall nur der Weg über eine verkleinerte Bildauflösung durch die Wahl einer „Region of Interest“ (ROI) gegangen werden. Ein Limit stellt jedoch auch hier die zur Verfügung stehende Beleuchtungseinheit dar. Die nach diesen Maßgaben aufgenommenen und aufbereiteten Bilder werden mit Hilfe der PIV und PTV analysiert.

4.2.1 Particle Image Velocimetry

„Particle Image Velocimetry“ ist eine Korrelationstechnik, die seit circa 35 Jahren in der Fluidodynamik zum Einsatz kommt [204] und seit fast 20 Jahren auch im Bereich der staubigen Plasmen eingesetzt wird [211, 217]. Hier wurden mittels PIV unter anderem Transportphänomene untersucht [218], staubakustische Wellen [218, 219] oder auch Phasenübergänge [220]. Zahlreiche Review-Artikel (bspw. [205, 207, 209, 211]) und Bücher (bspw. [206, 208, 210]) setzen sich intensiv mit dieser Technik auseinander.

Die Grundannahme der PIV besteht darin, dass zwischen zwei Einzelaufnahmen die Relativbewegung innerhalb von Strukturen, beispielsweise einer Gruppe von Partikeln, gering ist im Vergleich zur Translationsbewegung der Gesamtstruktur. In diesem Sinne verschiebt sich also eine ganze Struktur von Bild zu Bild mit der zu beobachtenden Strömung. Aus dieser Verschiebung kann dann auf die Strömungsgeschwindigkeit geschlossen werden. Dieses Vorgehen ist in Abb. 4.2 skizziert.

Nach der Bildaufbereitung durch Abzug eines Offsetbildes wird das erste Bild in Segmente aufgeteilt, die jeweils einige Partikel enthalten sollten – zur Erhöhung der Ortsauflösung können sich die Segmente auch überlappen. Die Teilbilder werden nun einzeln mit dem Folgeframe 2D-kreuzkorreliert. In der Darstellung ist der Versatz stets auf die relative Positionierung der oberen linken Bildecke bezogen. Dort, wo die Korrelation den höchsten Wert annimmt, ist die (neue) Position der Partikelgruppe im Kamerabild anzunehmen. Aus dem Versatz der Positionen der Partikelgruppe im ersten und zweiten Kamerabild kann die Strecke ermittelt werden, die die Teilchengruppe in der Zeit zwischen den Aufnahmen zurückgelegt hat. Wird dies für alle Segmente gemacht, ergibt sich ein Geschwindigkeitsfeld auf einem Gitter. Wird dieses Verfahren für viele Aufnahmen durchgeführt, kann für jeden Gitterpunkt eine mittlere Geschwindigkeit berechnet werden. Da bei geeigneter Parameterwahl stets eine Gruppe von Partikeln in die Analyse einbezogen wird, ist PIV relativ robust gegenüber kleineren Störungen, wie beispielsweise gegenüber dem Hinzukommen von Partikeln in die Beleuchtungsebene oder auch gegenüber dem Partikelverlust auf umgekehrtem Wege. Diese Robustheit geht auf Kosten der örtlichen Auflösung – Trajektorien einzelner Partikel können nicht dargestellt werden.

Bei ungeeigneten Eingangsdaten kann es bei der PIV auch zu Fehlinterpretationen kommen. Im Fall der Torusströmung kann es beispielsweise bei zu geringen Bildraten zu Problemen kommen, da dann die Krümmung und die damit verbundene Drehung der Partikelgruppen nicht mehr vernachlässigbar sind. Auch inhomogene Beleuchtung stellt ein Problem dar, da hier insbesondere bei der Überdeckung heller Bildbereiche hohe Korrelationswerte zu erwarten sind. In den meisten Fällen führen diese Faktoren in der Auswertung zu einer Unterschätzung der Geschwindigkeiten.

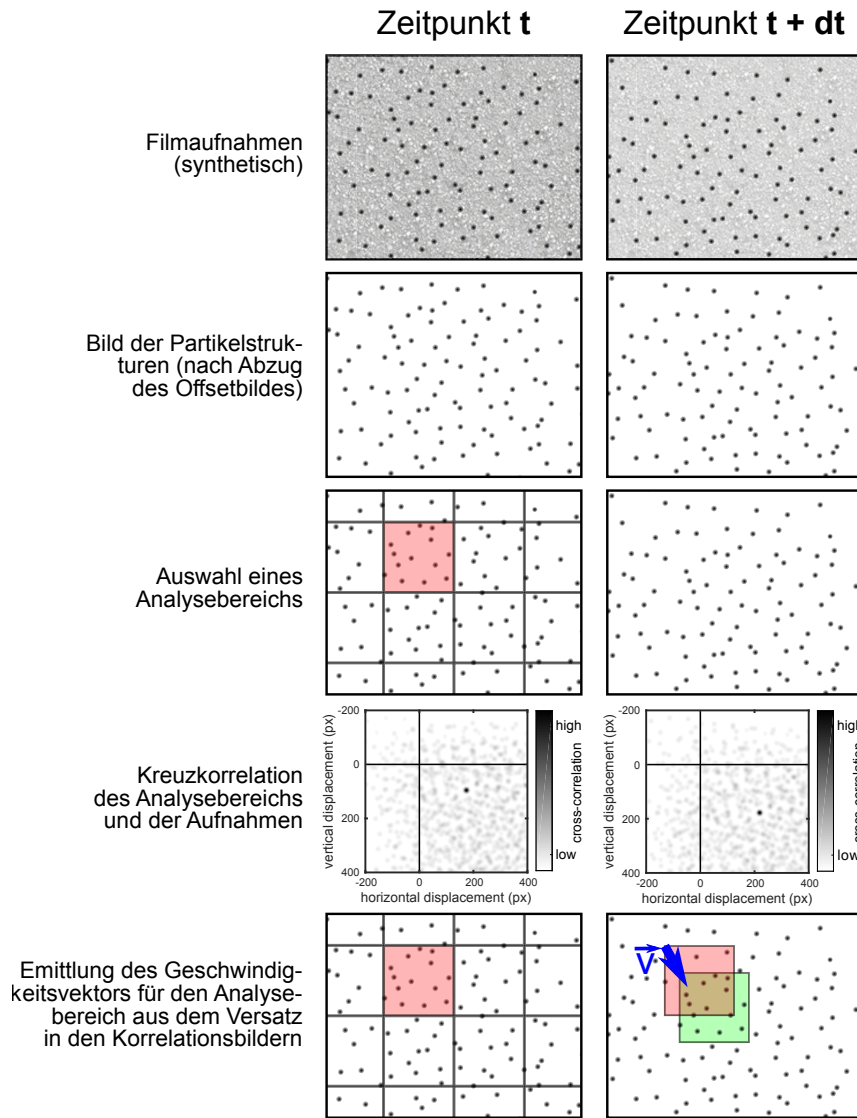


Abbildung 4.2: Skizzenhafte Darstellung zum Vorgehen bei der PIV-Analyse. Von zwei aufeinanderfolgenden Bildern der Filmaufnahme wird jeweils das Offsetbild abgezogen, so dass die Aufnahmen im Wesentlichen nur noch die Partikel zeigen. Das erste Bild wird in Segmente geteilt. Durch die Kreuzkorrelation dieses Segmentes mit dem Folgebild wird der Versatz gegenüber dem Ursprungsbild ermittelt. Dieser Versatz entspricht der Strecke, die die Partikelgruppe in der Zeit zwischen den Aufnahmen zurückgelegt hat.

Durch Verwendung der „Stereoscopic PIV“ Technik, bei der eine zweite Kamera unter einem anderen Blickwinkel die Beleuchtungsebene aufzeichnet, kann zusätzlich die Bewegungskomponente orthogonal zur Ebene abgeschätzt werden [221–223]. Darüber hinaus wurden weitere PIV-Techniken entwickelt, die eine vollständige 3D-Rekonstruktion erlauben, beispielsweise die „Holographic PIV“ [224] oder auch die „Tomographic PIV“ [225]. Auch diese Techniken wurden zum Teil in der Vergangenheit bereits im Bereich der stauigen Plasmen eingesetzt [226–229].

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellten Ergebnisse beschränken sich auf zweidimensionale Strömungsfelder. Neben eigenen Umsetzungen einer PIV-Routine wurde zur Auswertung bevorzugt das MatPIV Paket für MATLAB[®] verwendet [230]. Da im Folgenden jedoch insbesondere die Mikrophysik der Partikelströmung studiert werden soll, reichen die Informationen über mittlere Geschwindigkeitsfelder nicht für alle Auswertungen aus. Aus diesem Grunde wurde ebenfalls die „Particle Tracking Velocimetry“ eingesetzt, die im folgenden Abschnitt erläutert wird.

4.2.2 Particle Tracking Velocimetry

Kerngedanke der „Particle Tracking Velocimetry“ ist die Rekonstruktion der einzelnen Partikeltrajektorien. Auf diesem Wege wird versucht, für jedes Partikel zu jedem Zeitpunkt Ort und Geschwindigkeit zu bestimmen. Damit dies gelingen kann, ist eine eindeutige Zuordnung nötig, welches Partikel in einem Bild welchem Partikel im Folgebild entspricht. Da alle Partikel optisch identisch sind, stellt dies eine große Herausforderung dar.

In frühen Versionen der PTV wurden die Partikel durch zwei aufeinanderfolgende Lichtblitze beleuchtet und die Abbildungen auf demselben Film aufgenommen [204]. Durch den Versatz der einzelnen Partikel auf dem Bild und die Zeit zwischen den Lichtblitzen konnte dann die mittlere Geschwindigkeit der einzelnen Partikel ermittelt werden. Heutzutage erfolgt die Aufzeichnung in der Regel mit Digitalkameras – in unserem Falle werden die Partikel kontinuierlich mit einem Laserfächer beleuchtet und die Bildaufnahme geschieht mit einer Hochgeschwindigkeitskamera.

Das Vorgehen bei der PTV ist schematisch in Abb. 4.3 dargestellt. Im ersten Schritt der Auswertung werden die Videodaten aufbereitet und die einzelnen Partikel identifiziert. Nun wird für jedes Partikel des Ursprungsbildes im Folgeframe dasjenige Partikel identifiziert, das der vorherigen Position am nächsten ist. Diese Partikel werden einander zugeordnet und aus dem Versatz wird die Geschwindigkeit berechnet. Damit dieses Verfahren zuverlässig funktioniert, darf der Versatz der Partikel einen halben (minimalen) Interpartikelabstand nicht überschreiten, da es sonst zu Fehlinterpretationen kommen kann. In der Praxis kann diese Beschränkung überwunden werden, indem Prognosen für die erwarteten künftigen Partikelpositionen getroffen werden und anschließend in der Umgebung dieser erwarteten Positionen gesucht wird. Eine solche Prognose kann beispielsweise durch Extrapolation der bisherigen Trajektorien getroffen werden oder durch die Verwendung von Ergebnissen der PIV. Letzteres Verfahren wurde im Rahmen dieser Arbeit im Bereich laminarer Strömungen angewendet.

Auch mit diesen Möglichkeiten der Verfeinerung bleibt die PTV im Vergleich zur PIV Systemen mit verhältnismäßig kleiner Partikelzahl vorbehalten. Darüber hinaus erfordert die PTV den Einsatz von Hochgeschwindigkeitskameras, um die benötigte Zeitauflösung, aus der ausreichend kleine Partikelversätze resultieren, zu erreichen. In der Praxis kann es dennoch durch das Hinzukommen von Partikeln in die Beleuchtungsebene und ihr Austreten hieraus zu Fehlinterpretationen kommen.

Inzwischen wird auch vermehrt die 3D-PTV im Bereich der staubigen Plasmen eingesetzt [231]. Durch Verwendung mehrerer synchronisierter Kameras, die unter verschiedenen Winkeln auf ein Beobachtungsvolumen ausgerichtet sind, wird es möglich, die vollständige 3D-Information der Partikel zu ermitteln (Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung). Dieses Verfahren ist am Experiment MATILDA-II jedoch (noch) nicht anwendbar:

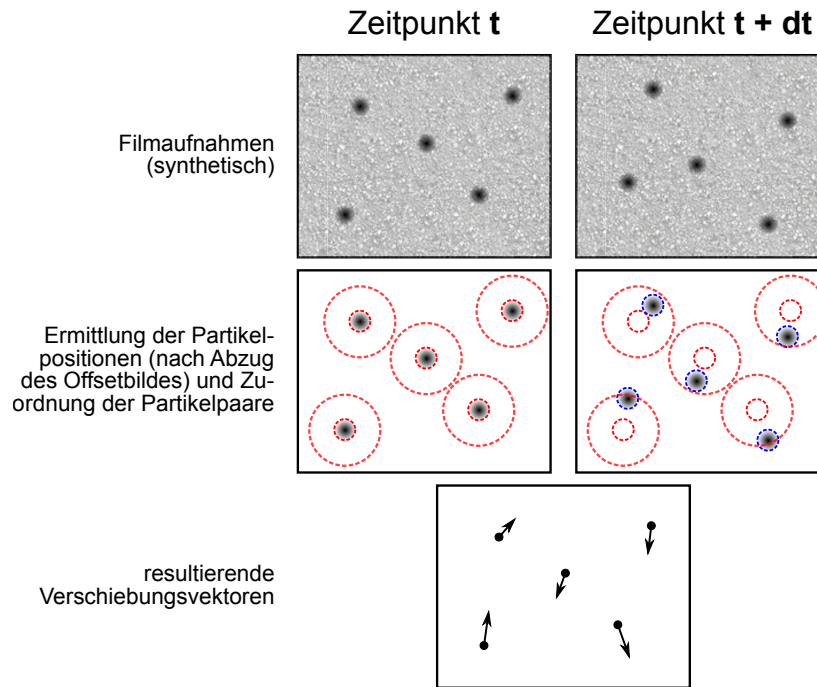


Abbildung 4.3: Skizzenhafte Darstellung zum Vorgehen bei der PTV-Analyse. Von zwei aufeinanderfolgenden Bildern der Filmaufnahme wird jeweils das Offsetbild abgezogen, so dass die Aufnahmen im Wesentlichen nur noch die Partikel zeigen. Die Partikelpositionen werden als Koordinaten ermittelt. Jedem Partikel wird im Folgeframe das Partikel zugeordnet, dass ihm am nächsten ist. Aus dem örtlichen Versatz und der Zeit zwischen den Aufnahmen ergeben sich die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Partikel.

Zum einen ist das Beobachtungsvolumen verhältnismäßig groß und müsste dennoch fein aufgelöst sein, um den kompletten Torus zu erfassen. Zum anderen ist die optische Zugänglichkeit des Beobachtungsvolumens konstruktionsbedingt stark beschränkt, so dass eine gleichzeitige Beleuchtung und Beobachtung mit ausreichendem Winkelversatz zwischen den Kameras technisch nicht umsetzbar ist.

4.3 LANGEVIN-Dynamik-Simulationen

Als komplementärer Zugang zu den Laborexperimenten wurden im Rahmen dieser Arbeit Simulationen durchgeführt, um die Dynamik der Partikel im anodischen Plasma zu untersuchen. Im Bereich der staubigen Plasmen sind numerische Experimente ein bewährtes Werkzeug, um ein tiefer gehendes Verständnis für Vorgänge zu erzielen, die experimentell schwer darstellbar sind [232, 233] oder sogar über die experimentellen Möglichkeiten hinausgehen [234, 235]. Im Wesentlichen haben sich hierbei drei verschiedene Simulationsansätze durchgesetzt, die im Vergleich zueinander unterschiedliche Stärken und Schwächen zeigen. An dieser Stelle soll ein knapper Überblick gegeben werden. Detaillierte Informationen sind beispielsweise in den Büchern Refs. [3, 236, 237] zu finden.

Der erste Ansatz ist die Simulation eines Plasmas im Flüssigkeitsbild (engl.: „fluid model“ oder auch „hydrodynamic model“). In diesem Fall werden das Plasma und die Partikel jeweils als eigene Flüssigkeitsspezies eingeführt [238–240], die über die POISSON-Gleichung

und die auf den Staub wirkenden Kräfte gekoppelt sind. Die Lösungen dieser Simulationen sind selbst-konsistent. Es ist jedoch zu beachten, dass die Prozesse auf Ebene der eigentlichen Plasmaspezies und die Dynamik der Staubpartikel in der Regel auf unterschiedlichen Zeitskalen ablaufen. Liegt der Fokus der Untersuchung auf der Staubbynamik, so wird die Effizienz der Berechnung hierdurch stark beeinträchtigt. Dem kann Rechnung getragen werden, indem abwechselnd die Dynamik des Plasma-Fluids und die des Staub-Fluids berechnet wird. Insgesamt bleibt diese Methode jedoch sehr zeitaufwändig.

Der zweite Simulationsansatz ist die sogenannte „Particle in Cell“ (PIC) Methode. Hierbei werden simulierte Teilchen (oder Elemente eines Fluids) in einem kontinuierlichen Phasenraum angenommen. Das Bezugssystem wird hierfür so gewählt, dass die Bewegungsgleichungen dieser Elemente in Form der EULER-Gleichungen lösbar werden. Parallel hierzu werden Felder (insbesondere elektrische und magnetische Felder) auf ein statisches Gitter interpoliert berechnet. Von diesem Gitter aus wird dann die Kraft auf die Partikel interpoliert. Im Rahmen der Untersuchung staubiger Plasmen wird dieser Ansatz häufig gewählt, um das Verhalten von Ionen und Elektronen in der Nähe von Staubpartikeln zu studieren. In diesem Zusammenhang wird die Simulation oft um Monte-Carlo-Simulationen zur Berücksichtigung von Stößen ergänzt. Beispiele für den Einsatz dieser Technik sind die Aufladung von Staubpartikeln [78, 241], die Berechnung der Ionenwindkraft [79] oder auch die Betrachtung von Wake-Effekten hinter Staubpartikeln [91, 242]. Da der Phasenraum sechsdimensional ist (drei Raumrichtungen und drei Impulskomponenten), sind PIC Simulationen sehr rechenintensiv und werden meist nur im Zusammenhang mit ruhenden Staubpartikeln verwendet.

Der dritte Simulationsansatz sind Molekulardynamik- (MD) bzw. LANGEVIN-Dynamik-Simulationen (LD). Diese Art der Simulationen ist für den Bereich der staubigen Plasmen – insbesondere bei der Betrachtung der Staubbynamik – sehr geeignet. Im Gegensatz zu den anderen Verfahren wird bei diesem Ansatz das eigentlich Plasma nicht simuliert, sondern der Einfluss des Plasmas auf die Partikel durch analytische Ausdrücke indirekt vermittelt, beispielsweise durch das (abgeschirmte) Wechselwirkungspotential der Partikel und externe Kräfte wie die elektrische Feldkraft oder auch die Ionenwindkraft. Da in dieser Sichtweise nur der Staub betrachtet wird und die anderen Plasmakomponenten nur indirekt in der Betrachtung enthalten sind, wird das betrachtete System auch „One Component Plasma“ (OCP) genannt. Ein Vorteil bei dieser Art der Simulation ist, dass sie direkt auf der Zeitskala der Staubbynamik arbeitet und daher sehr effizient ist. Der Effizienzgewinn geht jedoch zu Lasten der Allgemeingültigkeit: Durch Vernachlässigung des direkten Einflusses der verschiedenen Plasmakomponenten aufeinander hängen die Simulationsergebnisse empfindlich von den Annahmen ab, die eingangs in der Simulation implementiert wurden.

Inzwischen wurden im Bereich der staubigen Plasmen auch Hybrid-Ansätze entwickelt, die verschiedene Simulationsmethoden kombinieren. So entwickelten MATYASH *et al.* einen Code (P³M), der PIC und MD-Simulation vereint, um hiermit die Aufladung von mehreren, in ein Plasma eingefügte Partikel zu studieren [81, 243, 244].

Im Rahmen dieser Arbeit werden zur Analyse der Staubbynamik LD-Simulationen eingesetzt. Das zugrunde liegende Modell und die Berechnungsroutinen hierfür wurden maßgeblich von REICHSTEIN *et al.* entwickelt und sind ausführlich in Veröffentlichungen [113–118] sowie seiner Dissertaion [200] niedergelegt. Aus diesem Grunde sollen im Folgenden lediglich die zentralen Aspekte für das Verständnis des Simulationsalgorithmus vorgestellt werden. Für die programmiertechnische Umsetzung sei auf die genannten Quellen verwiesen.

4.3.1 Modellfunktion für toroidale Staubströmungen

Ein Kernaspekt der LD-Simulationen ist die Entwicklung eines geeigneten Modells, das (indirekt) die Plasmaeigenschaften und die Auswirkungen des Plasmas auf die Staubpartikel beinhaltet. Hierzu wurde zunächst das um die Hauptachse der Kammer rotationssymmetrisch angenommene Plasmapotential Φ der sekundären Entladung gemessen und hierüber das elektrische Feld $\vec{E} = -\nabla\Phi$ berechnet sowie mittels der Ergebnisse aus den Sondenmessungen die Staubladung q_d abgeschätzt. Mit Hilfe der stationären Bewegungsgleichung der Ionen

$$m_i (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i + m_i \nu_{in} \vec{v}_i = e (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) \quad (4.1)$$

mit der Ionen-Neutral-Stoßfrequenz ν_{in} konnte anschließend die Driftgeschwindigkeit derselben ermittelt werden. Es zeigt sich, dass die Hauptdrift entlang der elektrischen Feldlinien verläuft, die Ionen allerdings auch eine kleine HALL-Komponente in toroidaler Richtung besitzen. Mit dem Modell zur Bestimmung der Ionenwindkraft nach HUTCHINSON [79], siehe Abschn. 2.1.3, konnte hieraus die Ionenwindkraft \vec{F}_i auf Staubpartikel berechnet werden. Zur Modellierung des radialen Staubeinschlusses wurde anschließend die radiale Komponente dieser Ionenwindkraft $F_{i,r}$ und die entsprechende radiale, hierzu antiparallele Komponente der elektrischen Feldkraft $F_{el,r}$ herangezogen. Alle weiteren Kräfte, beispielsweise die Erdgravitation, sind mehr als eine Größenordnung kleiner als diese beiden und wurden daher für die Modellierung des Confinements vernachlässigt. In einem kleinen Bereich um die exakte Gleichgewichtslage der einschlussbildenden Kräfte variiert der radiale Kraftbetrag nahezu linear mit der Entfernung, so dass es für die Modellvorstellung legitim ist, diesen Einschluss durch ein harmonisches Potential zu nähern. Unter Hinzunahme von Ergebnissen von TROTTEBERG *et al.* zum axialen Staubeinschluss [152] modellierte REICHSTEIN das Confinement basierend auf diesen Messungen durch ein torusförmiges Potential mit großem Radius $\rho = R_0$. Um die Gleichgewichtslage herum hängt dieses Potential quadratisch ab von dem kleinen Torusradius $r = \sqrt{(\rho - R_0)^2 + z^2}$ und wird beschrieben durch

$$U_C(\rho, z) = \frac{m_d}{2} \omega_0^2 [(\rho - R_0)^2 + z^2] \quad (4.2)$$

in den Zylinderkoordinaten φ , ρ und z . Zur Visualisierung ist ein Torus in dem entsprechenden kartesischen und zylindrischen Koordinatensystem in Abb. 4.4 dargestellt. Anzumerken ist, dass der Winkel hier – wie eingezeichnet – im Uhrzeigersinn von der negativen x-Achse aus gemessen wird. Die Winkelangaben selbst werden häufig in Form von Uhrzeiten auf einem analogen Ziffernblatt angegeben. ω_0 beschreibt in obiger Gleichung die Confinementstärke, die direkt von den ursprünglichen Kräften abhängt und in diesem Falle in axialer und radialer Richtung als gleich stark angenommen wird. Im Rahmen dieser Arbeit wurde darüber hinaus ein Confinement mit elliptisch paraboloider Form angenommen, also unterschiedlichen Confinementstärken ω_z und ω_ρ in axialer und radialer Richtung:

$$U_C(\rho, z) = \frac{m_d}{2} [\omega_\rho^2 (\rho - R_0)^2 + \omega_z^2 z^2] . \quad (4.3)$$

Aus diesen Einschlusspotentialen ergibt sich die einschließende Kraft (engl.: confinement force)

$$F_C = -\nabla U_C . \quad (4.4)$$

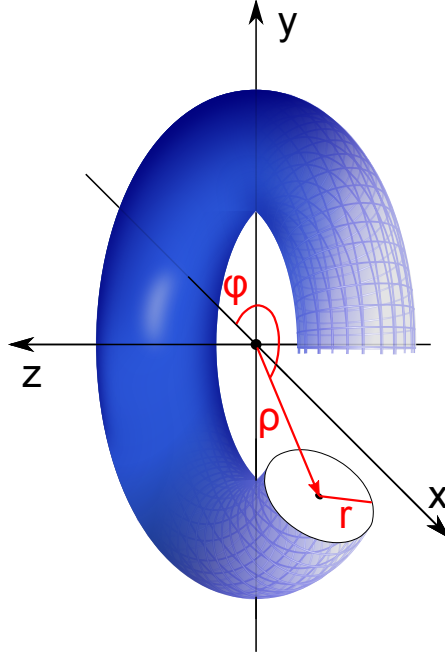


Abbildung 4.4: Visualisierung des toroidalen Confinements. Eingezeichnet sind das kartesische Koordinatensystem und das korrespondierende zylindrische Koordinatensystem. Im letzteren Fall wird der Winkel φ im Rahmen dieser Arbeit von der negativen x-Achse aus im Uhrzeigersinn gemessen. Winkelangaben erfolgen in der Regel in Form von Uhrzeiten auf einem analogen Ziffernblatt ($\varphi = 0 \triangleq 9:00$ h). (Ursprüngliche Torusabbildung: LEONID_2 [cc-by-sa 3.0])

Die toroidal gerichtete HALL-Komponente des Ionenwindes $\vec{F}_{i,\varphi} = F_{i,\varphi} \vec{e}_\varphi$ stellt den eigentlichen Antrieb der Staubrotation dar und ist aus Symmetriegründen entlang der Torusbahn konstant anzunehmen. Da diese Kraftkomponente auf den Staub in etwa der Größenordnung der Erdgravitation entspricht, fließt diese Kraft als freier Parameter in die Simulation ein, deren Betrag in Vielfachen der Erdgravitation skaliert wird. Die Erdgravitation \vec{F}_g selbst wirkt in der Simulation zu jedem Zeitpunkt auf den Staub mit konstanter Kraft in $-y$ -Richtung.

Eine weitere externe Kraft auf den Staub ist die gegenseitige Wechselwirkung der stark negativ geladenen Partikel. Durch Berücksichtigung dieser Kraft koppeln die Partikel aneinander und stoßen sich gegenseitig ab. Diese Kraft wird durch die paarweise YUKAWA-Wechselwirkung \vec{F}_Y der Partikel bestimmt und birgt daher einen hohen Rechenaufwand in sich.

Da sich die Partikel im Experiment im schwach ionisierten Plasma befinden, wechselwirken sie auch mit dem Neutralgas. Dieses hat auf zwei entscheidende Weisen einen Einfluss auf die Staubbynamik. Zum einen wird die Bewegung der Partikel durch den Gas-hintergrund durch Reibung gedämpft. Diese Neutralgasreibung wird in den Simulationen im Sinne der EPSTEIN-Reibung $\vec{F}_N = -m_d \beta \vec{v}_i$ mit dem EPSTEIN-Koeffizienten β , vgl. Abschn. 2.1.3, berücksichtigt. Zum anderen wirkt der Hintergrund auch als Wärmebad, das eine erratische Kraftkomponente \vec{F}_R auf den Staub verursacht.

Aufgrund der Berücksichtigung der zwei zuletzt genannten Kräfte handelt es sich bei den Simulationen nicht mehr um Molekulardynamik-Simulationen im eigentlichen Sinne, sondern um LANGEVIN-Dynamik-Simulationen (LD). Im verbreiteten Sprachgebrauch werden jedoch auch diese speziellen Simulationen mit dem allgemeineren Begriff MD-Simulation bezeichnet. Im Bereich der staubigen Plasmen findet diese Art der Simulation beispielsweise bei der Untersuchung der Diffusionseigenschaften zweidimensionaler Cluster im flüssigen Zustand Anwendung [245, 246] oder auch bei der Untersuchung der Bildung von YUKAWA-Bällen [232, 233]. Die programmiertechnische Umsetzung dieser Art der Berechnung kann in den oben genannten Arbeiten von REICHSTEIN *et al.* nachvollzogen werden oder ist auch in Fachbüchern hinreichend beschrieben [237, 247].

Die Bewegungsgleichung für jedes einzelne der N enthaltenen Partikel, die den hier vorgestellten Simulationen zugrunde liegt, lautet also in Summe

$$m_d \dot{\vec{v}}_j = \vec{F}_C + \vec{F}_{i,\varphi} + \vec{F}_g + \vec{F}_Y + \vec{F}_N + \vec{F}_R, \quad j \in \{1 \dots N\}. \quad (4.5)$$

Diese Gleichung wird für jedes Partikel einzeln gelöst. Anschließend wird die mittlere Bewegung der Einzelteilchen für einen ausreichend kleinen Zeitschritt berechnet und das Vorgehen für die nun neuen Positionen wiederholt. Die Wahl des Zeitschrittes Δt ist dahingehend kritisch, dass zu kleine Zeitschritte in der Praxis zu unnötig langen Laufzeiten führen und zu große Zeitschritte zu numerischer Instabilität führen sowie das dynamische Verhalten des Systems nicht mehr korrekt abzubilden vermögen. Im vorliegenden Fall wurde diesem Problem durch eine dynamische Anpassung des Zeitschrittes an die Simulationsparameter begegnet, so dass die Bewegungsstrecke der Partikel zwischen zwei Berechnungen in etwa $1/20$ WIGNER-SEITZ-Radius beträgt¹.

Umsetzung der Simulationen mittels CUDA™

Bereits im vorangegangenen Abschnitt wurde kurz darauf eingegangen, dass zu jedem Zeitschritt für jedes Partikel die aus der Summe der Kräfte resultierende Beschleunigung berechnet werden muss. Hierfür müssen in $N(N-1)/2$ einzelnen Berechnungen die paarweisen YUKAWA-Wechselwirkungen zwischen allen Partikeln ermittelt werden. Der Zeitaufwand für die Simulationen lässt sich signifikant verringern, wenn diese voneinander unabhängigen Berechnungen der Wechselwirkungen parallel durchgeführt werden. Eine geeignete Architektur hierfür ist die „Compute Unified Device Architecture“ (CUDA™) von NVIDIA® [249], die den Grafikprozessor (GPU) für die parallelisierte Berechnung einsetzt. Seit ihrer Einführung vor circa zehn Jahren hat die CUDA™-Technik Einzug in eine Vielzahl wissenschaftlicher Bereiche gehalten, insbesondere auch in den der Physik [250–256].

In den durchgeführten Simulationen wurde ein Code verwendet, in dem das N-Teilchenproblem, ähnlich wie in Ref. [257] vorgestellt, implementiert ist und auf der Grafikkarte mittels CUDA™ berechnet wird. Die Lösung der Bewegungsgleichung erfolgt hingegen mit einem VERLET-ähnlichen Algorithmus [237] auf dem Hauptprozessor.

Die Eingangsparameter der Simulationen wurden so gewählt, dass sie die experimentelle Situation gut nachempfinden und damit ein guter Einblick in die grundlegende Staubdynamik möglich sein sollte. Die gewählten Parameter werden stets im Rahmen der vorgestellten Simulationsergebnisse mit angegeben. Eine Übersicht der freien Parameter und typischer Werte liefert Tab. 4.1.

¹ Diese Bedingung stellt ein Analogon zur COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Bedingung dar, wie sie aus der numerischen Strömungsmechanik bekannt ist [248].

Tabelle 4.1: Typische Simulationsparameter

Parameter	Variable	Wert	Anmerkung
Partikelzahl	N	4096 bzw. 8192	Die Wahl einer Zweierpotenz ist nicht zwingend, hat sich jedoch in der Vergangenheit bewährt.
Partikelradius	r_d	0,5 μm	Größe entsprechend der Herstellerangaben des im Laborexperiment verwendeten Staubs.
Partikelladung	q_d	$-2512 e$	Ladung nach OML-Modell.
Abschirmlänge	λ	180 μm	An experimentelle Untersuchungen angelehnt, vgl. Abschn. 5.3.
Neutralgastemperatur	T	300 K	Standardtemperatur nahe der Raumtemperatur.
EPSTEIN-Koeffizient	β	50 ... 200 s^{-1}	Diese Werte entsprechen Drücken von $P_{\text{Ar}} \approx 4 \dots 16 \text{ Pa}$.
Großer Torusradius	R_0	5,3 mm	An experimentelle Untersuchungen angelehnter Fallenradius, vgl. Abschn. 5.3.
Axiale Fallenfrequenz	ω_z	122 ... 300 s^{-1} , i.d.R.: 300 s^{-1}	Erfahrungswert in Anlehnung an Laborexperimente im Parameterbereich aus Abschn. 5.3.
Radiale Fallenfrequenz	ω_ρ	300 ... 738 s^{-1} , i.d.R.: 300 s^{-1}	Erfahrungswert in Anlehnung an Laborexperimente im Parameterbereich aus Abschn. 5.3.
Antriebskraft (Toroidale Ionenwindkraft)	$F_{i,\varphi}$	0 ... 1,2 g , i.d.R.: 0,8 g	An experimentelle Untersuchungen der Modellentwicklung angelehnt, die Größenordnung der Gravitation abdeckend.

Anzumerken ist an dieser Stelle, dass trotz der sorgsam Parameterwahl eine solche Simulation das Laborexperiment nicht identisch abbilden kann. Dies geht auf die bei der Modellierung vorgenommenen Annahmen und Vereinfachungen zurück. So können im Laborexperiment grundsätzlich weitere Effekte auftreten, die in der vorgestellten Modellierung unberücksichtigt bleiben. Beispiele für diese Art von Effekten wären eine mögliche Neutralgasrotation, wie sie in der Vergangenheit in einer Entladung mit gekreuztem elektrischen und magnetischen Feld von CARSTENSEN *et al.* beobachtet wurde [65], oder auch die Ausbildung durch Ionenströmungen angeregter Staubdichtewellen, wie sie in anodischen Plasmen auftreten können [94, 111, 151, 152, 178].

4.3.2 Analyseverfahren für Simulationsdaten

Die Analyse der simulierten Staubströmung ist der zentrale Schritt, um aus den numerischen Daten Erkenntnisse zu gewinnen. Im Rahmen der Auswertung werden dabei zwei Wege beschritten. Zum einen werden „einfache“, nicht rechenaufwändige Auswertungsoperationen „on the fly“ während eines Simulationsdurchlaufs ausgeführt.

Neben anderen charakteristischen Größen können auf diesem Wege direkt nach der Berechnung ein mittleres Strömungsfeld oder auch die mittlere kinetische Temperatur der Partikel in einem Torusschnitt ausgegeben werden. Zum anderen werden Simulationsdaten ausgegeben, so dass sie im „Postprocessing“ mit MATLAB[®] ausgewertet werden können. Um die Dynamik über einen ausreichend langen Zeitraum erfassen zu können, aber dennoch eine handhabbare Datenmenge zu erzeugen, wird hierfür in der Regel nur jeder 50. Simulationsschritt gespeichert. Die ausgegebenen Daten umfassen neben den Eingangsparametern und den hieraus abgeleiteten Größen insbesondere die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten aller Partikel.

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Simulationsergebnisse sind in der präsentierten Form dem Postprocessing entnommen, das insbesondere rechenaufwändige Analysen wie die DELAUNAY-Triangulation oder auch die VORONOI-Analyse enthält. Da diese Programmcodes lediglich Partikelpositionen und Geschwindigkeiten als entscheidende Eingangsparameter enthalten, können sie grundsätzlich auch zur Auswertung getrackter experimenteller Daten verwendet werden. Die direkten Auswertungen, die die Simulationsläufe liefern, werden in der Regel zum allgemeinen Studium von Parametervariationen und als Entscheidungshilfe genutzt, ob die rechen- und zeitintensive Auswertung im Postprocessing erfolversprechend sein könnte.

Insgesamt bilden das Laborexperiment MATILDA-II und die hierauf zugeschnittenen LANGEVIN-Dynamik-Simulationen zusammen ein reichhaltiges Portfolio an Möglichkeiten und Methoden, die inhomogene toroidale Staubströmung zu untersuchen. Dieser komplementäre Ansatz hat bereits in der Vergangenheit Früchte getragen und zur beidseitigen Übertragbarkeit von Ergebnissen geführt. In dieser Arbeit werden die vorgestellten Ansätze nun verwendet, um insbesondere die Mikrophysik inhomogener toroidaler Staubströmungen zu analysieren und um auf diesem Wege ein besseres Verständnis für die Strömungsdynamik stark gekoppelter Systeme am granularen Übergang zu erhalten. Im folgenden Kapitel werden zunächst Ergebnisse der Untersuchungen im Laborexperiment vorgestellt, bevor in späteren Kapiteln detailliert auf Ergebnisse der LANGEVIN-Dynamik-Simulationen eingegangen wird.

5 | Experimenteller Nachweis kristalliner Staubströmungen

Kristalline Strukturen zeichnen sich durch ihr hohes Maß an Ordnung aus, die aus der Positionierung der beteiligten Teilchen auf einem mathematischen Gitter resultiert. Hieraus ergibt sich eine hohe Periodizität in der Struktur und selbst die Position entfernter Nachbarn ist lokalisiert.¹ Übertragen auf kristalline Strömungen bedeutet dies, dass sie durch Abstandsordnung und (lokale) Orientierungsordnung charakterisiert sind, die Partikel der Nachbarschaften also über mehrere Interpartikelabstände hinweg zu jedem Zeitpunkt lokalisiert sind.

In diesem Kapitel wird der Nachweis kristalliner Staubströmungen im Laborexperiment MATILDA-II erbracht und erläutert. Die grundsätzliche Existenz kristalliner Strömungen stark gekoppelter Systeme wurde bereits in Form kristalliner Ionenstrahlen nachgewiesen [258–262], jedoch nicht für inhomogene Strömungen und nicht im Bereich der staubigen Plasmen. Im letzteren Gebiet sind Untersuchungen des kristallinen Zustands an statischen Systemen ein weit verbreitetes, etabliertes Forschungsfeld [16–19, 58, 263, 264], das inzwischen auch in Lehrbüchern Einzug gehalten hat [3, 125, 126]. Anzeichen für die Existenz stationärer, inhomogener, kristalliner Strömungen in dem für diese Arbeit verwendeten Aufbau wurden in LD-Simulationen gefunden [115, 116]. Bei geeigneten Parameterwerten zeigten die Simulationsergebnisse eine Schalenbildung in der Strömung, die als Kristallisation aufgrund einer effektiven Kühlung durch das Neutralgas verstanden wurde.

Da die Simulation das Experiment jedoch nicht voll umfänglich abbildet und im Laborexperiment nicht beliebige Parameter frei und unabhängig voneinander variiert werden können, stellt sich die Situation in der Praxis schwieriger dar. Der Weg zum kristallinen Torus sowie dabei auftretende Effekte werden in den folgenden Abschnitten präsentiert und erläutert. Zunächst wird aufgezeigt, wie störende Effekte als zusätzliche Heizmechanismen wirken und so jegliche Ordnung zerstören. Nach Beseitigung oder ausreichender Dämpfung sämtlicher Störungen wird dann die Interpartikelordnung innerhalb der Strömung analysiert und charakterisiert. Zentrale Ergebnisse, die in diesem Kapitel vorgestellt werden, wurden 2015 in Ref. [120] veröffentlicht.

¹„Lokalisiert“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass es möglich ist, Teilchen der Struktur eindeutig Gitterpunkten zuzuordnen.

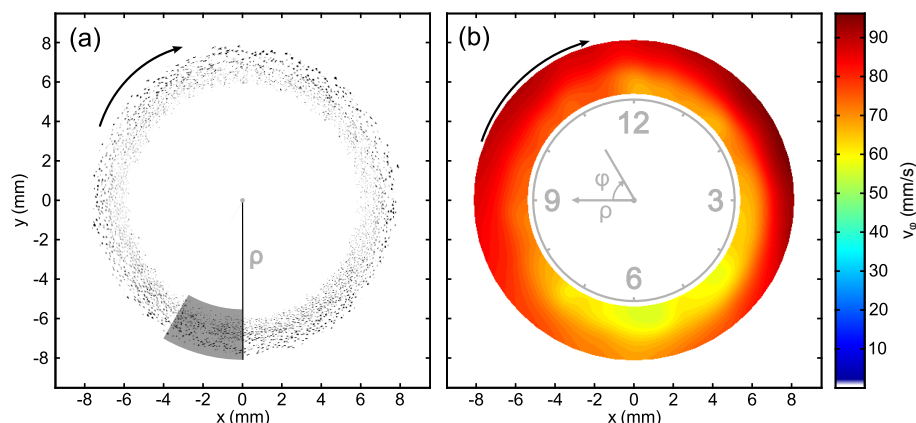


Abbildung 5.1: Untersuchung eines „dicken“ Staubtorus im Laborexperiment. (a) Invertiertes Einzelbild einer Aufnahme mittels Videomikroskopie. Die Ausbreitung von Staubdichtewellen in radialer Richtung kann anhand der Dichtevariation der Staubpartikel identifiziert werden. (b) Geschwindigkeitsfeld der rotierenden Staubwolke, erhalten mittels PIV. Aufgrund der hohen Staubdichte und der starken Fluktuationen ist die Analyse störungsanfällig. Insbesondere der radiale Geschwindigkeitsgradient in der unteren Hälfte des Torus ist ein solches Artefakt. (Grafik nach Ref. [120])

5.1 Radiale Dichtewellen in Staubtori

Im Bereich der staubigen Plasmen ist der Übergang eines fluiden (also flüssigen oder gasartigen Zustands) hin zu einem kristallinen Zustand von besonderer Bedeutung.¹ Dieser Übergang und die damit einhergehende Kristallisation treten auf, wenn der Kopplungsparameter Γ (das Verhältnis aus Wechselwirkungsenergie mit den Nachbarpartikeln und thermischer Energie der Partikel, vgl. Abschn. 2.1.4) einen kritischen Wert übersteigt. Typische, in diesem Zusammenhang für dreidimensionale Systeme genannte Werte sind $\Gamma = 168 \pm 4$ [156, 265], $\Gamma = 180$ [125] oder auch $\Gamma = 200$ [125]. Für Systeme endlicher Größe zeigte SCHIFFER [266], dass im Falle kleiner Cluster der kritische Kopplungsparameter auch höher liegen kann. In solchen Fällen kann sein Wert bei $\Gamma > 500$ liegen.

Eine Möglichkeit, eine Kristallisation der Strömung im Experiment herbeizuführen, besteht demzufolge darin, die Kopplung zwischen den Partikeln im Staubtorus zu vergrößern, indem die direkte elektrostatische Wechselwirkung der Teilchen untereinander verstärkt wird. Dies kann beispielsweise durch eine erhöhte Staubdichte geschehen, die durch eine erhöhte Anzahl von Teilchen im Confinement erreicht werden kann [267, 268]. Abbildung 5.1 zeigt einen solchen, außergewöhnlich stark gefüllten Torus mit einem verhältnismäßig großen Strömungsquerschnitt, der bei einem Neutralgasdruck von $p \approx 9$ Pa und einem Anodenstrom von $I_a = 15$ mA aufgezeichnet wurde. Der Staub füllt im betrachteten Schnitt einen Bereich von $\rho \approx 5,5$ mm bis $\rho \approx 8$ mm. Insgesamt zeigt die Staubströmung das für diesen Aufbau typische Verhalten: Es bildet sich ein stationäres Strömungsfeld aus, in dem der Staub im Uhrzeigersinn um ein zentrales Void strömt [vgl. PIV-Analyse, dargestellt in Abb. 5.1 (b)]. Die genaue Ermittlung der Toroidalgeschwindigkeiten in dem hier gezeigten Torus ist jedoch ausgesprochen schwierig, da die Staubströmung von einer starken Wellenaktivität überlagert wird, die sowohl in der PIV-Analyse als auch im Particle-Tracking zu Fehlinterpretationen führt und auf diesem Wege die Ergebnisse stark verfälscht.

¹ Ein Übergang in einen klassischen gasartigen Zustand kann an dieser Stelle nicht sauber charakterisiert werden, da dieser einen attraktiven Anteil im Wechselwirkungspotential voraussetzt. Das hier angenommene Wechselwirkungspotential ist rein repulsiv [156].

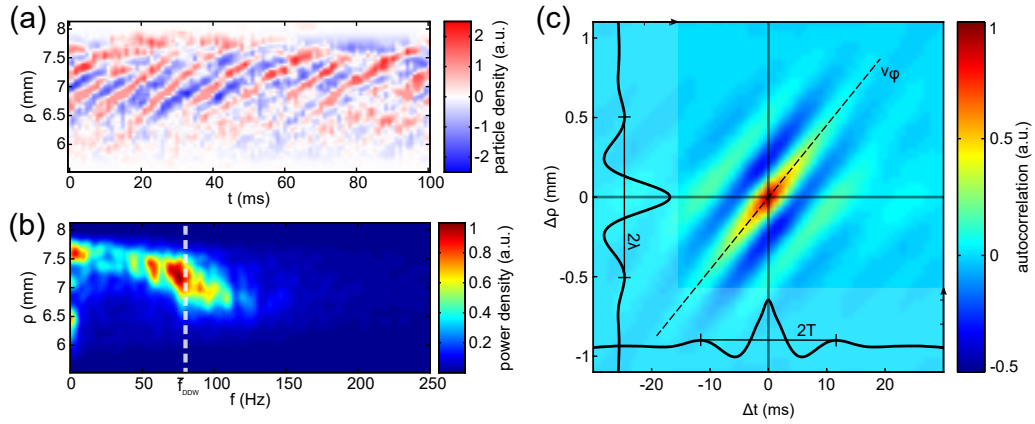


Abbildung 5.2: Auswertung eines „dicken“ Staubtorus. (a) Ausschnitt des Raum-Zeit-Diagramms der Staubbichtefluktuation in radialer Richtung, gemittelt für den Bereich $\varphi = 6:00$ h bis $\varphi = 7:00$ h. (b) Spektralanalyse der Staubbichtefluktuationen in Abhängigkeit des großen Torusradius. Der Großteil der Leistung findet sich in einem Bereich zwischen $\rho = 6,5$ mm und $\rho = 7,5$ mm. (c) 2D-Autokorrelation der Staubbichtefluktuation. Seitlich eingezeichnet ist jeweils das Profil entlang der Hauptachsen. Diese liefern die Wellenlänge und die Periodendauer der Staubbichtewelle. (Grafik nach Ref. [120])

In dem dargestellten Geschwindigkeitsfeld sind die Werte am äußeren Rand des Torus als am zuverlässigsten anzusehen, da hier die Staubbichte am geringsten und die Eindeutigkeit der Partikelidentifizierung am höchsten ist. Die so ermittelte Geschwindigkeit ist in der linken Torushälfte, in der der Staub aufsteigt, etwas geringer als die Geschwindigkeiten in der nach unten gerichteten Strömung. Es ist anzumerken, dass aufgrund des hohen Füllgrades der Falle die Kopplung der Partikel untereinander über den gesamten Torus derart hoch ist, dass die Strömung in Bezug auf die Toroidalgeschwindigkeit Eigenheiten einer starren Rotation aufweist. Entsprechend fällt die Variation der Geschwindigkeit ($v_{\phi,\min} \approx 70$ mm/s und $v_{\phi,\max} \approx 90$ mm/s) geringer aus als in früheren Betrachtungen mit geringerer Staubbichte.

Die auftretenden Staubbichtewellen sind bei genauer Betrachtung bereits in dem Einzelbild des Torus [Abb. 5.1 (a)] zu erahnen. Es zeigt sich, dass diese radial nach außen propagieren – in toroidaler Richtung konnte keine Wellenaktivität ermittelt werden. Zur Analyse der Staubbichtewellen wird der Torus in Winkelabschnitte $\Delta\varphi$ von ungefähr einer Stunde Breite geteilt¹.

Ein etabliertes Verfahren zur Visualisierung der zeitlichen Entwicklung von Dichtewellen ist im Bereich der staubigen Plasmen das Raum-Zeit-Diagramm der Dichte. Ein solches Diagramm ist für die mittlere Dichtefluktuation in ρ -Richtung in dem Bereich $\varphi = 6:00$ h bis $\varphi = 7:00$ h in Abb. 5.2 (a) dargestellt. Farbkodiert zeigt die Grafik regelmäßige Dichtefluktuationen, die von der Innenseite des Torus in radialer Richtung nach außen propagieren. Durch die direkte Auswertung des Diagramms ist es bereits möglich, erste Schätzwerte für Wellenlänge und Periodendauer zu erhalten:

¹ Diese Aufteilung resultiert aus weitergehenden Voruntersuchungen: Die Wellenaktivität innerhalb eines Abschnitts kann bei dieser Unterteilung noch als kohärent angesehen werden, benachbarte Abschnitte entwickeln sich jedoch inkohärent zueinander. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass bei der vorherrschenden Toroidalgeschwindigkeit die Transitzeit der Partikel durch die Abschnitte in etwa der Propagationsdauer der Staubbichtewellen von innen nach außen entspricht. Dies bedeutet, dass die „Information“ einer Welle, die zu Beginn eines Abschnitts eingebracht wurde, am Ende dieses Abschnitts verloren ist.

Entlang der Zeitachse sind ungefähr acht vollständige Wellenzyklen zu erkennen, woraus sich eine Periodendauer von $T_{\text{DDW}} \approx 12,5 \text{ ms}$ berechnen lässt. Die Wellenlänge ergibt sich aus dem Abstand gleicher Phasen entlang des großen Torusradius und lässt sich auf $\lambda \approx 0,5 \text{ mm}$ abschätzen.

Um Informationen über die Intensität und die Frequenzverteilung der Dichtefluktuation in Abhängigkeit von der Propagationsrichtung (ρ -Richtung) zu erhalten, wird in einer weiteren Analyse mit Hilfe der FOURIER-Transformation das Frequenzspektrum in Abhängigkeit des großen Torusradius ermittelt. Dies ist in Abb. 5.2 (b) dargestellt. Sowohl das Einzelbild des Staubtorus [vgl. Abb. 5.1 (a)] als auch das Raum-Zeit-Diagramm [Abb. 5.2 (a)] legen den Verdacht nahe, dass die Wellenfronten im radialen Bereich zwischen $\rho \approx 6,5 \text{ mm}$ bis $\rho \approx 7,5 \text{ mm}$ besonders ausgeprägt sind. Dieser Eindruck bestätigt sich durch das Frequenzspektrum, in dem der Großteil der Leistung in diesem Bereich zu finden ist. Bevorzugt treten hier Frequenzen zwischen $f_{\text{DDW,min}} = 50 \text{ Hz}$ und $f_{\text{DDW,max}} = 100 \text{ Hz}$ auf. Das gewichtete Mittel der Frequenz liegt bei $\bar{f}_{\text{DDW}} \approx 80 \text{ Hz}$ und führt damit auf die bereits zuvor abgeschätzte Periodendauer von $\bar{T}_{\text{DDW}} = 1/\bar{f}_{\text{DDW}} = 12,5 \text{ ms}$. Die Ausdehnung des Frequenzbereichs, in dem die Leistung zu finden ist, kann als Hinweis auf eine kurze zeitliche Kohärenz der Welle verstanden werden. Insgesamt zeigt das orts aufgelöste Spektrum darüber hinaus eine Tendenz zur Abnahme der Frequenz mit steigendem Radius.

Eine Möglichkeit, die Kohärenzzeit der Störung zu ermitteln sowie weitere charakteristische Größen wie beispielsweise die Propagationsgeschwindigkeit der Störung direkt zu erhalten, besteht in der Auswertung der 2D-Autokorrelation des vollständigen Datensatzes der Dichtefluktuation. Das Ergebnis dieser Berechnung ist in Abb. 5.2 (c) dargestellt. In dieser Darstellungsform sind unmittelbar drei zentrale Größen des Wellenfeldes erkennbar:

- die mittlere Phasengeschwindigkeit [$\bar{v}_{\text{DDW,ph}} = (45 \pm 5) \text{ mm/s}$],
- die Wellenlänge [$\bar{\lambda} = (0,5 \pm 0,05) \text{ mm}$] und
- die Periodendauer [$\bar{T}_{\text{DDW}} = (11,6 \pm 1) \text{ ms}$].

Unter Berücksichtigung der Ungenauigkeiten, die bei dieser Auswertung aus der begrenzten Zeitauflösung bei der Datenaufnahme und der kurzen Kohärenzzeit der hier vorliegenden Störung resultieren, ergeben diese Werte zusammen mit den vorangegangenen Analysen ein stimmiges Bild. Einen Schätzwert für die zeitliche Kohärenz der auftretenden Wellen liefert die Abnahme der Korrelation mit der Zeit. Die hieraus berechnete Kohärenzzeit beträgt $T_{\text{coh}} \approx 3,2 \text{ ms}$ und liegt – wie aufgrund der Breite des Spektrums erwartet – deutlich unter der Transitzeit einer Dichtewelle sowohl in radialer Richtung als auch der Transitzeit der Partikel durch den Stundenwinkel.

Die Form der hier gefundenen Störung sowie die im Rahmen der Analysen ermittelten Größen sind typisch für selbsterregte Staubbichtewellen [125]. Darüber hinaus wurde diese Art der Wellen bereits in der Vergangenheit in kompakten Staubwolken in anodischen Plasmen beobachtet [94, 111, 152, 178], so dass es naheliegend ist, die vorliegende Störung als selbsterregte Staubbichtewelle zu identifizieren, die dem gleichen Anregungstyp unterliegt (Zwei-Strom-Instabilität des BUNEMAN-Typs, vgl. Refs. [48, 95, 196]). Um diese Annahme zu untermauern, wird im folgenden Unterabschnitt ein Vergleich mit der Dispersionsrelation für die Anregung von Staubbichtewellen angestellt.

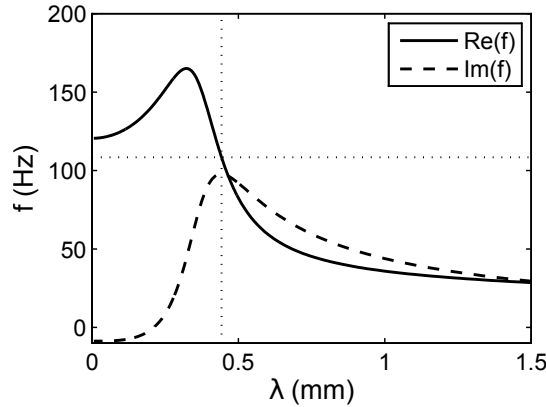


Abbildung 5.3: Dispersionsrelation entsprechend Gleichung (2.35) für den Parameterbereich, in dem im Experiment Staubdichtewellen beobachtet wurden [$p \approx 9 \text{ Pa}$, $E \approx 500 \text{ V/m}$, $n_e \approx 10^{15} \text{ m}^{-3}$, $n_d \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}$, $q_d \approx 1256e$]. Im Gegensatz zu der üblichen Darstellung der Graphen wurde hier die Frequenz der Welle f über der Wellenlänge λ aufgetragen (anstelle von ω über k). Auf diesem Wege sind die Werte aus der Grafik direkt mit der Auswertung der experimentellen Daten vergleichbar. Die maximale Anregung erfährt eine Störung mit Wellenlänge $\lambda_{\text{max}} \approx 0,44 \text{ mm}$ und der Frequenz $f_{\text{max}} \approx 108 \text{ Hz}$.

5.1.1 Vergleich der Staubdichtefluktuation mit der Dispersionsrelation selbsterregter Staubdichtewellen

In Abschn. 2.1.5 wurde die Dispersionsrelation für die Anregung ebener Staubdichtewellen hergeleitet. Diese ist in Abb. 5.3 für den hier vorliegenden Fall dargestellt. Da zu dem konkreten Parametersatz keine expliziten Sondenmessungen vorliegen, wurden für die elektrische Feldstärke sowie für die Elektronendichte Erfahrungswerte aus ähnlichen Parameterbereichen verwendet: $E \approx 500 \text{ V/m}$ und $n_e \approx 10^{15} \text{ m}^{-3}$. Bei der Staubladung kann es aufgrund des Druckes von $p \approx 9 \text{ Pa}$ zu einer Ladungsreduktion gegenüber dem OML-Modell kommen. Diesem Umstand wird mit einem Schätzwert der Ladung auf 50% des OML-Werts Rechnung getragen. Die Staubdichte von $n_d \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}$ wurde durch die Analyse von Einzelbildern der Videomikroskopie erhalten. Die Dispersionsrelation zeigt hohe Anregungsraten in einem breiten Spektrum von $f \approx (30 \dots 170) \text{ Hz}$ bei Wellenlängen von $\lambda \approx (0,35 \dots 1,5) \text{ mm}$. Insbesondere besitzt sie eine maximale Anwachsrate für eine Störung mit einer Wellenlänge von $\lambda_{\text{max}} \approx 0,44 \text{ mm}$ und der Frequenz $f_{\text{max}} \approx 108 \text{ Hz}$. Diese Werte liegen – wie das gesamte angeregte Spektrum – in dem Größenbereich der Störung, die im Experiment beobachtet wurde.

Die Übereinstimmung der Werte mag zunächst überraschen, da die verwendete Dispersionsrelation die Anregung von Wellen modelliert (keine ausgebildeten Wellenfelder, wie sie hier analysiert wurden), zentrale Größen aus dem Experiment nur abgeschätzt wurden und auch geometrische Effekte eine Rolle spielen können¹. Die Ursache, dass die Werte dennoch korrespondieren, liegt in der „Robustheit“ der selbsterregten Staubdichtewelle begründet: Ihre Anregung deckt über weite Parameterbereiche das Frequenzspektrum ab, das auch im Experiment beobachtet wurde. Diese Übereinstimmung kann daher als Indikator verstanden werden, dass es sich bei der beobachteten Störung tatsächlich um selbsterregte Staubdichtewellen handelt.

¹ Das betrachtete System ist endlich und torusförmig und die Welle divergiert nach außen. Das Modell beschreibt ursprünglich unbegrenzte, kompakte Staubwolken mit ebenen Wellenfronten.

p (Pa)	n_e (m ⁻³)	n_d (m ⁻³)	E (V/m)	$q_d/q_{d,OML}$	$\text{Im} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{pd}} \right)$	$k_{\max} \lambda_{De}$	$\text{Re} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{pd}} \right)$
2	10 ¹⁴	50 · 10 ⁹	250	0,5	0,74	2,34	0,88
2	10 ¹⁴	50 · 10 ⁹	250	1,5	0,46	2,06	0,83
15	10 ¹⁴	50 · 10 ⁹	250	0,5	0,12	1,95	0,48
2	10 ¹⁵	250 · 10 ⁹	250	0,5	1,85	2,62	1,26
2	10 ¹⁵	250 · 10 ⁹	250	1,5	1,43	2,56	1,14
15	10 ¹⁵	250 · 10 ⁹	250	0,5	0,05	1,56	0,26
2	10 ¹⁴	50 · 10 ⁹	1000	0,5	0,18	1,06	0,80
2	10 ¹⁴	50 · 10 ⁹	1000	1,5	0,12	1,17	0,79
15	10 ¹⁴	50 · 10 ⁹	1000	0,5	0,08	1,67	0,77
2	10 ¹⁵	250 · 10 ⁹	1000	0,5	0,52	0,72	0,84
2	10 ¹⁵	250 · 10 ⁹	1000	1,5	0,40	0,78	0,78
15	10 ¹⁵	250 · 10 ⁹	1000	0,5	0,49	3,73	0,82

Tabelle 5.1: Anwachsrate einer Staubbichtewelle bei typischen Experimentparametern entsprechend der Dispersionsrelation (2.35). Wellenzahl und Frequenz sind durch entsprechende Skalierungen mit der Abschirmlänge bzw. der Staubplasmafrequenz einheitenfrei. In allen Fällen gibt es Frequenzen in Abhängigkeit der Wellenzahlen, zu denen der Imaginärteil positiv ist. Dies spricht für das Auftreten selbsterregter Staubbichtewellen.

Um dies zu überprüfen und um festzustellen, ob entsprechend der Dispersionsrelation überhaupt mit einem Parameterbereich zu rechnen ist, in dem der Staubeinfang in Torusform ohne Wellenaktivität möglich ist, werden im kommenden Unterabschnitt die Anregungsraten bei verschiedenen Experimentparametern analysiert.

5.1.2 Selbsterregte Staubbichtewellen im Bereich der Versuchsparameter

Im Folgenden soll die Dispersionsrelation als Indikator genutzt werden, ob in den Parameterbereichen, die den Staubeinfang in Torusform zulassen, mit dem Auftreten selbsterregter Staubbichtewellen zu rechnen ist. In Tab. 5.1 sind daher die maximalen Anwachsrate und die zugehörigen Frequenzen dieser Störung für einige begrenzende Werte des betrachteten Parameterraums gegeben. Hierbei orientiert sich der direkt zugängliche Wert für den Druck p an den Extrema, bei denen der Staubeinschluss in Torusform möglich ist. Die Werte für die Elektronendichte und das elektrische Feld sind so gewählt, dass sie die in der Vergangenheit durch Sondenmessungen ermittelten Werte einschließen. Die Abschätzung der Staubbichte basiert zum einen auf der Auswertung von Videomikroskopiedaten, zum anderen auf der Analyse von LANGEVIN-Dynamik-Simulationen. Auch hier wurde ein Bereich gewählt, der sämtliche Erfahrungswerte umschließt. Die Abschätzung der Staubladung erfolgt zunächst mittels OML-Modell. Effekte, die zu einer Ladungsminderung oder aber zu einer Ladungserhöhung führen könnten (vgl. Abschn. 2.1.1), wurden durch Verringern und Vergrößern des Ladungswertes um jeweils 50% berücksichtigt.

Es wird deutlich, dass die verwendete Dispersionsrelation für alle Einträge die Anregung einer Welle vorhersagt. Tatsächlich zeigt eine ausführliche Analyse, dass für alle

experimentell relevanten Parameterzusammenstellungen¹ stets eine positive Anwachsrate für selbsterregte Staubdichtewellen besteht. Dieses Ergebnis entspricht den Erfahrungen aus dem experimentellen Alltag: Praktisch treten in allen stark gefüllten Staubtori selbsterregte Staubdichtewellen auf.

Vor dem Hintergrund dieser ergänzenden Betrachtungen sind die sich in dem präsentierten Torus ausbreitenden, selbsterregten Staubdichtefluktuationen als selbsterregte Staubdichtewellen zu identifizieren. Das ausgeführte Beispiel ist mustergültig für alle Tori mit vergleichbarem oder größerem Strömungsquerschnitt über den gesamten zugänglichen Parameterraum. Die radial nach außen gerichteten Wellen verlaufen parallel zur Richtung des Ionenwindes. Dieses Verhalten steht in guter Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen für kleine, kompakte Staubsysteme [111, 178, 196, 269–271].

Mit einer radialen Dicke von $d \approx 2,5 \text{ mm}$ passen etwa fünf Wellenzüge der Länge $\bar{\lambda} = 0,5 \text{ mm}$ in den Torus. Dies ist eine Systemgröße, bei der selbsterregte Staubdichtewellen auch in der Vergangenheit in kompakten Staubwolken in anodischen Plasmen beobachtet wurden. Die Ausdehnung dieser Systemdimension wird daher bei der Charakterisierung von Staubtori als Kriterium herangezogen, einen Torus „dick“ zu nennen. Untersuchungen an kompakten Staubwolken zeigten jedoch auch, dass Staubdichtewellen nicht mehr angeregt werden können, wenn die Systemdimension in Richtung der Ionenströmung eine kritische Mindestgröße von wenigen Wellenlängen unterschreitet [111]. Dieses Kriterium soll im Folgenden verwendet werden, um wellenfreie Systeme zu erzeugen und zu untersuchen.

5.2 Störungen in Staubtori

Der vorangegangene Abschnitt lässt den Schluss zu, dass das Verschlinken des Torus eine Möglichkeit ist, Staubdichtewellen zu unterdrücken. Aus experimenteller Sicht kommen hierfür zwei Wege in Frage: Es kann versucht werden, die Staubmenge im Vergleich zur vorangegangenen Situation zu reduzieren oder den Einschluss in Richtung der Ionenströmung zu verstärken. Beide Verfahren sind mit einer Parametervariation verbunden, die Einfluss auf die Entladungscharakteristik und die Strömungsgeometrie haben. Darüber hinaus ist darauf zu achten, dass der Einschluss ausreichend stark ist. Dies ist wichtig, damit auch im langsamen Strömungsbereich, in dem die Querschnittsfläche entsprechend der Kontinuitätsgleichung am größten ist, die kritische Torusdicke nicht überschritten wird. Im Zuge des Wechselspiels zwischen Variation der Staubmenge und der Entladungsparameter wurden Parameterbereiche gefunden, in denen sich verschlankte Staubtori ausbilden.

Abbildung 5.4 (a) zeigt einen Ausschnitt eines solchen Torus, der in etwa den Winkelbereich von $\varphi = 12:30 \text{ h}$ bis $\varphi = 2:30 \text{ h}$ umfasst. Dieser Torus wurde bei einem Neutralgasdruck von $p \approx 5,4 \text{ Pa}$ und einem Anodenstrom von $I_a = 7 \text{ mA}$ aufgezeichnet. Die Partikel füllen einen radialen Bereich von $\rho \approx 5,8 \text{ mm}$ bis $\rho \approx 7,0 \text{ mm}$. In den Aufnahmen dieses Torus sind die Partikel deutlich unterscheidbar und haben verhältnismäßig kleine Relativgeschwindigkeiten zueinander, so dass „particle tracking“ gut möglich ist. Die Trajektorien dreier ausgewählter Partikel sind in Abb. 5.4 (b) farbkodiert dargestellt. Hierbei entspricht der Farbverlauf der Bewegung innerhalb eines Zeitraums von $\Delta t = 50 \text{ ms}$.

¹ Die relevanten Werte stammen aus dem Parameterfeld: $p = (2 \dots 15) \text{ Pa}$, $n_e = n_i = (10^{14} \dots 10^{15}) \text{ m}^{-3}$, $n_d = (50 \cdot 10^9 \dots 250 \cdot 10^9) \text{ m}^{-3}$, $|\vec{E}| = (250 \dots 1000) \text{ V m}^{-1}$ und $q_d = (0,5 \dots 1,5) \cdot q_{d, \text{OML}}$.

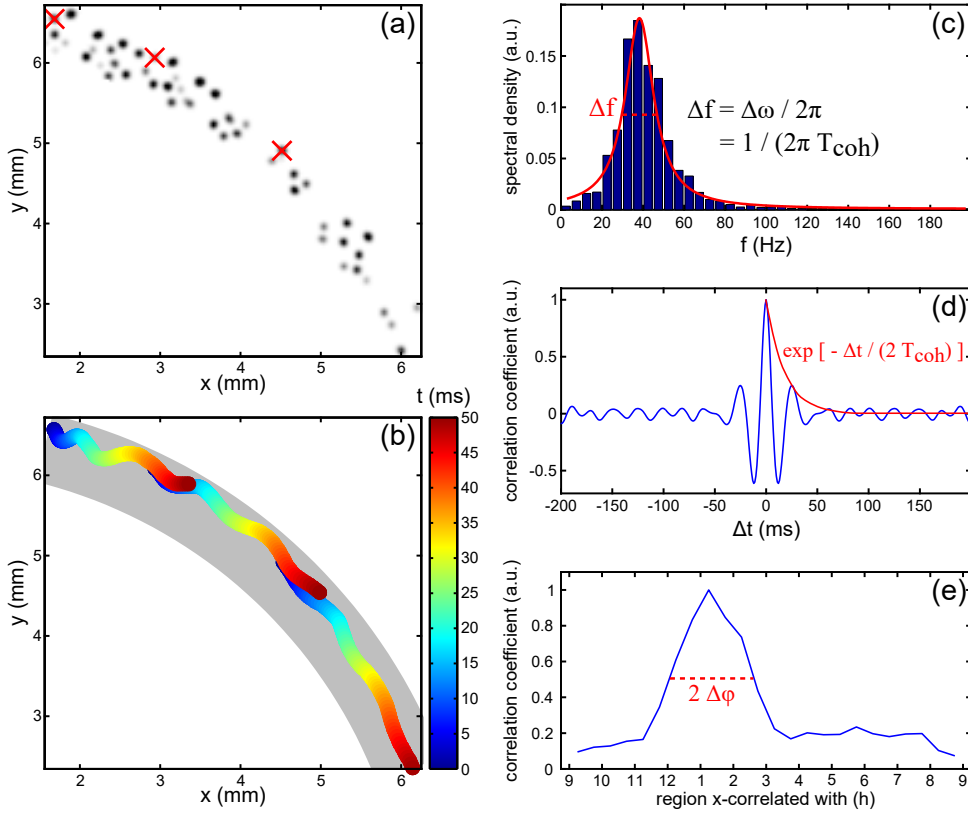


Abbildung 5.4: Untersuchung eines schlanken, von Störungen überlagerten Staubtorus. (a) Ausschnitt eines invertierten Einzelbildes der Staubströmung (ca. $\varphi = 12:30$ h bis $\varphi = 2:30$ h). (b) Farbkodierte Trajektorien der drei in Abb. (a) markierten Partikel. Die Radialbewegung der Partikel ist in Phase. Die Elongation der Trajektorien in Strömungsrichtung spiegelt die Beschleunigung wider. (c) Leistungsspektrum der Radialbewegung der Staubpartikel entsprechend FFT. (d) Autokorrelation der Radialbewegung des Schwerpunktes eines kleinen Winkelsegments. Der Abstand zweier Maxima entspricht der Periodendauer, aus der Abnahme der Korrelation lässt sich die Kohärenzzeit abschätzen. (e) Analyse der Kohärenz der Winkелеlemente über den Torus. Der Kohärenzwinkel beträgt etwa $\Delta\varphi = 1,5$ h. (Grafik nach Ref. [120])

Die Bewegungen der einzelnen Partikel verlaufen nicht glatt entlang des Confinements, sondern sind von einer Schwingung in radialer Richtung überlagert. Die unterschiedlichen Längen der Trajektorien hängen mit der Winkelposition auf dem Torus zusammen und resultieren aus der zunehmenden Geschwindigkeit in der abwärts gerichteten Strömung. Diese Beschleunigung ist ausgeprägter als in dem „dicken“ Torus und entspricht früheren Untersuchungen bei ähnlichen Parametern. Bei der Betrachtung der überlagerten Oszillationen fällt auf, dass diese für die drei gezeigten Trajektorien nahezu in Phase und kohärent verlaufen. Tatsächlich gilt dieser Befund für alle Partikel in einem kleinen Winkelabschnitt. Somit kann davon ausgegangen werden, dass keine Staumdichtewellen in diesem System auftreten, da diese eine Phasenverschiebung von innen nach außen aufweisen würden.

Diese Oszillationsbewegung, die in ähnlicher Weise wie die Staumdichtewelle als Heizmechanismus für den Staub wirkt und so eine Kristallisation der Strömung verhindert, soll im Folgenden genauer charakterisiert werden. Von besonderem Interesse ist hierbei auch die Frage, ob es sich bei den Störungen um lokale Effekte handelt oder ob sie über

den gesamten Torus korreliert sind. Da die Oszillationsbewegung in ρ -Richtung innerhalb eines kleinen Winkelbereichs kohärent ist, wird im Folgenden die Schwerpunktsoszillation im Bereich von $\varphi = 1:00$ h bis $\varphi = 1:30$ h untersucht. Durch den Mittelungsprozess ist die Analyse weniger störungsanfällig auf Trackingfehler. Darüber hinaus werden Partikel, die aus dem Winkelsegment hinausströmen, im Mittel stets durch einströmende Partikel ersetzt, so dass eine lange Zeitreihe für die Analyse zur Verfügung steht. In einem ersten Schritt der Analyse wird das Spektrum der radialen Geschwindigkeitskomponente mittels FOURIER-Transformation untersucht. Das resultierende Leistungsspektrum ist in Abb. 5.4 (c) aufgetragen. Hier zeigt sich eine Anregung im Bereich bis etwa 100 Hz, die im Wesentlichen aus einer breiten Spektrallinie besteht. An diese Linie wurde eine LORENTZ-Verteilung angefügt (rote Linie), mit deren Hilfe eine mittlere Frequenz von $\bar{f}_{\text{os}} \approx 40$ Hz und eine Kohärenzzeit von $T_{\text{coh}} \approx 9,3$ ms ermittelt werden kann. Die Eigenfrequenz dieser Schwingungen von $\bar{f}_{\text{os}} \approx 40$ Hz stimmt sehr gut mit einer Fallenfrequenz von $\omega = 250 \text{ s}^{-1}$ überein [$\omega/(2\pi) \approx 39,8 \text{ s}^{-1}$], wie sie für vergleichbare Parameter mittels Sondenmessungen bestimmt wurde und für Simulationen und Berechnungen in der Vergangenheit angenommen wurde [115–118].

Um die aus dem LORENTZ-Fit erhaltenen Werte abzusichern, wird eine weitere Analyse in Analogie zu den Untersuchungen am „dicken“ Torus durchgeführt. Hierzu wird die Autokorrelation der Zeitreihe der Schwerpunktsbewegung gebildet. Das Ergebnis ist in Abb. 5.4 (d) dargestellt. Auch in diesem Fall liefert der Abstand zweier Maxima die Periodendauer der Oszillation, hier $\bar{T}_{\text{os}} = (25 \pm 2)$ ms. Darüber hinaus liefert die Zeitkonstante der Abnahme der Einhüllenden die Kohärenzzeit, hier $T_{\text{coh}} \approx 8,9$ ms. Beide Werte stimmen gut mit den Ergebnissen der Spektralanalyse überein. Damit lassen die Ergebnisse den Schluss zu, dass es sich bei der Oszillation tatsächlich um eine Schwingung im radialen Confinement handelt. Der Ursprung bzw. der Anregungsmechanismus dieser Störung lässt sich hierdurch jedoch noch nicht benennen.

Um mögliche Ursachen der vorliegenden radialen Störungen zu identifizieren, wird die Korrelation der Störungen im betrachteten Segment und allen weiteren Halb-Stunden-Segmenten des Torus untersucht. Hierzu wird für jedes einzelne Segment die Schwerpunktsbewegung in radialer Richtung berechnet und anschließend die Kreuzkorrelation mit dem Referenzsegment durchgeführt. Sofern sich hier über den gesamten Torus eine hohe Korrelation ergibt, könnte auf globale Störungen geschlossen werden, die eine „Breathing-Mode“ anregen.¹ Bei stark negativer Korrelation gegenüberliegender Seiten könnte auf ein globales „Sloshing“ des gesamten Torus im Confinement geschlossen werden.² In ähnlicher Weise würden auch weitere globale Schwingungsmoden (Normalmoden) charakteristische Verläufe in der Korrelation bedingen. Das Ergebnis dieser Analyse ist in Abb. 5.4 (e) dargestellt. Bezogen auf das Referenzsegment beträgt die Kohärenzlänge über dem Winkel lediglich $\Delta\varphi \approx 1,5$ h in beide Richtungen. Bezogen auf die weiteren Segmente ist die Korrelation sehr klein. Dieser Befund lässt auf lokale Quellen der Störungen der Staubströmung schließen, die aus lokalen Fluktuationen im anodischen Plasma herrühren. Die den Partikeltrajektorien überlagerte Oszillation wird daher als in der Strömung mitgetragene, durch den Neutralgashintergrund gedämpfte Schwingung im radialen Confinement interpretiert.

¹ In diesem Falle würden alle Partikel entlang des großen Torusradius kohärent angeregt und der radiale Bewegungsanteil aller Partikel wäre ähnlich.

² Bei dieser Schwingungsmoden bewegen sich die gegenüberliegenden Partikel parallel, also im zylindrischen Koordinatensystem antiparallel in Bezug auf den großen Torusradius.

Es ist somit gelungen, durch Verschanken der Torusdicke auf $d \approx 1,2 \text{ mm} \approx 2\lambda$ das Auftreten von Staubbichtewellen in dem hier gezeigten Torus zu unterbinden. Dies entspricht den Erfahrungen für kompakte Staubwolken, die typischerweise eine Mindestgröße von $d \approx 3\lambda$ in Richtung der Ionenströmung benötigen, damit sich selbsterregte Staubbichtewellen ausbilden können [111, 178, 196, 271]. Die auftretenden lokalen, kohärenten radialen Störungen der strömenden Partikel können als extern angeregte Schwingungen im Confinement identifiziert werden. Um im Experiment eine Kristallisation zu ermöglichen, gilt es also, eine möglichst störungsfreie Plasmaumgebung zu schaffen, in der der Staub in einem schlanken Torus eingefangen werden kann.

5.3 Kristalline Staubtori

In den zwei zuvor betrachteten Staubtori wirkten Staubbichtewellen und Fluktuationen im anodischen Plasma als zusätzliche Heizmechanismen, die die Kristallisation der Staubströmung verhinderten. Ein Parameterbereich, in dem sich ein schlanker Staubtorus in einer ruhigen Plasmaumgebung ausbildet, wurde bei einem erhöhten Druck von $p \approx 15 \text{ Pa}$ und einem deutlich reduzierten Anodenstrom von $I_a = 1,5 \text{ mA}$ gefunden. Abbildung 5.5 (a) zeigt ein Einzelbild aus einer Aufnahme eines solchen schlanken, ungestörten Staubtorus. Durch diese starken Veränderungen der Sekundärentladung verändert sich zwar nicht die Systematik, die zur Ausbildung einer stabilen Gleichgewichtslage in Torusform führt, jedoch nehmen sie Einfluss auf die Geometrie des Einschlusses. Im vorliegenden Fall führte die Variation zu einem deutlich kleineren Void, so dass der große Torusradius auf $R_0 = (5,3 \pm 0,3) \text{ mm}$ verkleinert ist, und zu einem Aufweichen des axialen Confinements im Verhältnis zum radialen Confinement, so dass der Fallenquerschnitt in erster Näherung nun als elliptisch und nicht mehr als kreisrund angenommen werden muss. Die Strömungsquerschnitte an der 12:00 h- und der 6:00 h-Position sind perspektivisch in Abb. 5.5 (a) eingezeichnet (Inlays auf rotem Hintergrund) und werden in Abschn. 5.3.3 ausführlich dargestellt und diskutiert. Aufgrund dieser Verformung hat die rotierende Wolke nicht mehr die Form eines „Donuts“, sondern eher die eines Zylindermantels.

Die Schnittebene der toroidalen Staubströmung, die in Abb. 5.5 dargestellt ist, hat entsprechend der Dicke des Laserfächers eine Tiefe von ca. $120 \mu\text{m}$, so dass die erkennbaren Staubpartikel in axialer Richtung eine geringe Variation in ihrer Position aufweisen können. Bei genauer Betrachtung des Einzelbildes fällt bereits ein sehr hoher Grad an Ordnung unter den strömenden Partikeln auf. Die Partikel bewegen sich entlang fester, schalenartiger Bahnen. Je nach Winkelposition auf dem Torus sind ein, zwei oder drei Stromlinien zu erkennen. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes ist in Abb. 5.5 (d) die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte in Polarkoordinaten (φ - ρ -Plot) dargestellt. Aufgrund der starken Elliptizität des Confinements im vorliegenden Fall ist auch der Torusquerschnitt axial elongiert und weist in dieser Richtung im Gegensatz zu den kreisförmigen Schalen kaum Krümmung auf. Daher werden im Folgenden die „Schalen“ treffender als Schichten (engl. layers) bezeichnet.¹

¹ Mit dieser Änderung der Begrifflichkeit ändert sich auch die Zählweise in Bezug auf die Struktur. Bei n voll ausgebildeten kreisrunden Schalen zeigen sich im End-On View $2n$ Stromlinien. Ist diese Struktur nun elongiert, werden die n Schalen als $2n$ Schichten bezeichnet.

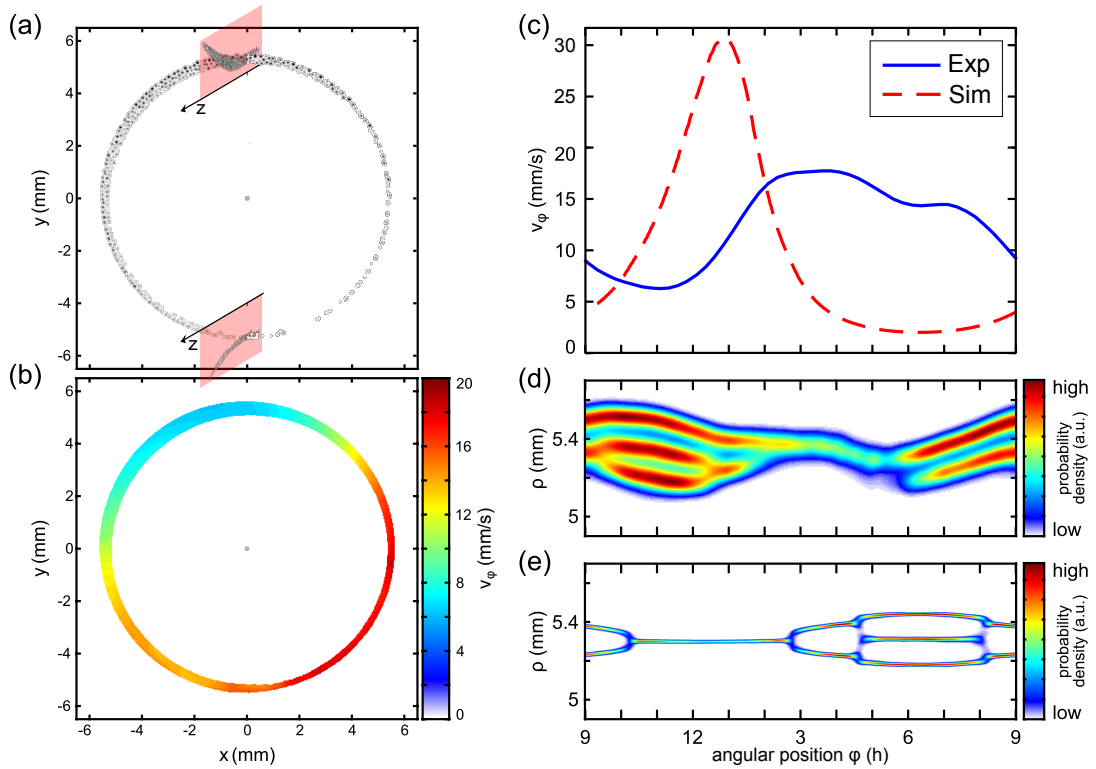


Abbildung 5.5: Abbildungen zu einem schlanken kristallinen Staubtorus. (a) Invertiertes Einzelbild eines kristallinen Staubtorus. Die Anzahl der unmittelbar erkennbaren Schichten variiert mit dem Winkel zwischen eins und drei. (b) Geschwindigkeitsfeld, wie es mittels Particle Tracking ermittelt wurde. Dort, wo sich die Anzahl der Schichten ändert, treten verhältnismäßig starke Gradienten auf. (c) Mittlere Toroidalgeschwindigkeit. (d) Histogramm/Wahrscheinlichkeitsdichte der Partikelpositionen auf dem Torusschnitt in Polarkoordinaten [in willkürlichen Einheiten (engl. arbitrary units) angegeben]. Die Verteilung zeigt deutlich die Anordnung auf festen Schichten. (e) Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten von Partikeln in einem zentralen Schnitt in einem simulierten Torus bei angepasstem elliptischen Confinement. (Grafik nach Ref. [120])

5.3.1 Schichtstruktur entlang der Staubströmung

In Abb. 5.5 (d) ist darüber hinaus eine systematische Abfolge inverser und normaler Bifurkationen der Stromlinien zu erkennen. Zu Beginn eines Umlaufs bei 9:00 h (dieser „Startpunkt“ der Betrachtung ist frei gewählt) finden sich zwei klar ausgeprägte Schichten. Die innere Schicht spaltet sich unverzüglich auf, so dass sich eine weitere Stromlinie an der Innenseite des Torus ausbildet und der Strömungsquerschnitt insgesamt wächst. Die Struktur aus drei Schichten besteht stabil in einem Winkelbereich von $\varphi \approx 10:00 \dots 12:00$ h. Im Zuge der Beschleunigung der Strömung im Bereich $\varphi > 12:00$ h verändert sich die Situation: In einer zweistufigen Kaskade vereinigen sich zunächst die beiden inneren Schichten. Anschließend verschmelzen die beiden übrig gebliebenen Schichten zu einer einzelnen, die den Winkelbereich von ca. $\varphi \approx 2:00 \dots 6:00$ h abdeckt. Im Anschluss an diese Phase erscheint wieder eine zweite Schicht an der Innenseite des Torus.

Um den Zusammenhang dieser strukturellen Phasenübergänge mit der Staubbynamik studieren zu können, ist in Abb. 5.5 (b) das mittlere Geschwindigkeitsfeld und in Abb. 5.5 (c) die gemittelte Toroidalgeschwindigkeit über dem Winkel aufgetragen. Es fällt auf, dass die auftretenden Geschwindigkeiten deutlich niedriger sind als in bisherigen Untersuchungen und nur etwa ein Fünftel der Werte der anderen gezeigten Tori ausmachen. Dieser Sachverhalt resultiert zum einen aus dem deutlich erhöhten Neutralgasdruck, der die Partikelbewegung stark dämpft. Auf der anderen Seite führt der geringe Anodenstrom direkt zu einer geringeren Ionenströmung und damit zu einer geringeren Ionenwindkraft. Hieraus resultiert ein schwächerer Antrieb der Rotation.

Der Strömungsquerschnitt – in dieser Darstellung im Wesentlichen durch die Anzahl der Schichten gegeben – und die Strömungsgeschwindigkeit sind aufgrund der geringen Kompressibilität der Staubwolke über die Kontinuitätsgleichung aneinander gebunden. Beschleunigung und Zusammenströmen sowie Verlangsamung und Aufspalten gehen Hand in Hand. Im dargestellten Ausschnitt der Strömung wird die Bedingung der Kontinuität ($n_d v_d A = \text{const.}$) jedoch nicht perfekt erfüllt, da insbesondere auch Staubpartikel in axialer Richtung in die Bildebene eintreten und diese verlassen.

Unter dem Wahrscheinlichkeitsdichteprofil des Torus in Polarkoordinaten ist zum Vergleich in Abb. 5.5 (e) ein weiteres Profil dargestellt. Dieses zeigt die Dichteverteilung eines simulierten Torus mit stark elliptischen Strömungsquerschnitt, in dem die experimentelle Situation nachempfunden wurde¹. Dieser Torus hat in radialer Richtung eine Ausdehnung von $\rho_{\min} \approx 5,15 \text{ mm}$ bis $\rho_{\max} = 5,45 \text{ mm}$. Die Anzahl der Stromlinien variiert wie im experimentellen Fall von eins bis drei. Beginnend bei $\varphi = 9:00 \text{ h}$ zeigt sich zunächst das Zusammenströmen der zwei vorhandenen Linien, das mit der Verkleinerung des Strömungsquerschnittes einhergeht. Im anschließenden Bereich von $\varphi \approx 10:30 \text{ h}$ bis $\varphi \approx 2:30 \text{ h}$ strömt der Staub in nur einer Schicht und spaltet sich dann wieder in einer Vorwärtsbifurkation in zwei Schichten. Bei $\varphi \approx 4:30 \text{ h}$ bildet sich eine neue zentrale Stromlinie aus, was mit einer weiteren Aufweitung der Querschnittsfläche einhergeht. Dieser dreischichtige Bereich bleibt bis etwa $\varphi = 8:00 \text{ h}$ bestehen. Der zu diesen Daten gehörige Geschwindigkeitsverlauf ist in Abb. 5.5 (c) als roter gestrichelter Graph eingetragen und zeigt aufgrund der Flusskontinuität ebenfalls den zuvor erläuterten Zusammenhang mit dem Strömungsquerschnitt. Die Größenordnung der Toroidalgeschwindigkeit entspricht dem experimentellen Fall.

Insgesamt weisen das Experiment und die angepasste Simulation eine gute Übereinstimmung auf – mit einer Ausnahme: Die beiden Strömungsfelder sind um etwa $\Delta\varphi = 4:00 \text{ h}$ phasenverschoben. Die Ursachen hierfür können vielfältig sein und beispielsweise in einer axialen Bewegungskomponente der Staubströmung im Experiment liegen. Darüber hinaus kann die unterschiedliche Form der Einschlusspotentiale Einfluss auf die Strömungsfelder nehmen, aber auch eine unpassenden Wahl der Simulationsparameter sowie Effekte, die in der Simulation nicht abgebildet werden, könnten die Unterschiede verursachen.

¹ Für diese Simulation wurde für das radiale Confinement eine Frequenz von $\omega_\rho = 1475 \text{ s}^{-1}$ und für das axiale Confinement $\omega_z = 244 \text{ s}^{-1}$ gewählt. Auf diesem Wege wird zum einen ein Verhältnis von radialer zu axialer Ausdehnung erreicht, das dem experimentellen Falle nahe kommt. Zum anderen korrespondieren Schichtabstand in Simulation und Experiment. Die Partikelzahl von $N = 4096$, der EPSTEIN-Koeffizient von $\beta = 200 \text{ s}^{-1}$ sowie ein Antrieb von $F_i = 0,2 \text{ g}$ sind so gewählt, dass sie die experimentelle Situation näherungsweise nachempfinden. Die weiteren Parameter entsprechen den in Abschn. 4.3.1 vorgestellten Standardparametern.

Ein solcher, in den Simulationen nicht abgebildeter Effekt wäre beispielsweise eine Inhomogenität des Einschlusspotentials. Mit einer solchen Inhomogenität, namentlich mit einem aufgeweichten Einschlusspotential im Bereich der „dicken“ Strömung, sind die Verschiebung der Strukturen und der Geschwindigkeit (die der Flusskontinuität folgt) erklärbar. Da sich diese Vermutung aufgrund der geringen Abmessungen der zu untersuchenden Struktur nicht durch Sondenmessungen bestätigen oder falsifizieren lässt, wurde eine Plausibilitätsprüfung mittels Simulationen durchgeführt. Hier zeigt sich, dass bereits kleine Veränderungen des harten Einschlusses Einfluss auf die Strömung nehmen können und somit eine solche Inhomogenität als Erklärung für die Verschiebung in Frage kommt.

Unabhängig von der Phasenverschiebung des Strömungsfeldes im Vergleich zu anderen bisher untersuchten Staubströmungen weist der Torus im Laborexperiment alle zentralen Eigenschaften auf, die zur Untersuchung einer kristallinen Staubströmung und dem Vergleich mit den Simulationen benötigt werden: Es etabliert sich ein stationäres, inhomogenes Strömungsfeld, in dem die Partikel festen Bahnen folgen und die Anzahl der Schalen/Schichten variiert.

5.3.2 Kristalline Ordnung entlang der Staubströmung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde das Verhalten der Strömung als Ganzes betrachtet und eine Ordnung der Partikel in Schichten gezeigt. Im Folgenden soll nun eine mikroskopische Strukturanalyse vorgenommen werden, das heißt, die Anordnung der Partikel zueinander soll untersucht werden. Hierfür werden zunächst sämtliche Partikelpositionen innerhalb eines gewählten Winkelbereichs ermittelt. Anschließend wird ein 2D-Histogramm der Nachbarpositionen erstellt.¹ Durch Wiederholung dieses Verfahrens für viele Einzelbilder und durch anschließendes Zusammenfassen der Histogramme bildet das Ergebnis dieser Analyse eine sehr gute Näherung zur 2D-Paarkorrelationsfunktion, so dass diese Bezeichnungen im Folgenden synonym verwendet werden. Abb. 5.6 zeigt verschiedene Histogramme, die auf diesem Wege die Interpartikelordnung innerhalb der Strömung visualisieren. Abbildung 5.6 (a) zeigt die Partikelanordnung im Bereich $\varphi \approx 4:00$ h, in dem der Staub in nur einer Schicht strömt, Abb. 5.6 (b) zeigt die Ordnung im Bereich mit zwei Lagen (hier für $\varphi \approx 8:00$ h) und die Abb. 5.6 (c) und (d) zeigen den Strömungsbereich bei $\varphi \approx 11:30$ h, in dem der Staub in drei Schichten strömt. In den gezeigten Diagrammen ist die Winkelachse durch Multiplikation mit dem mittleren Radius in Längeneinheiten transformiert, so dass Radialrichtung und Toroidalrichtung in den Darstellungen identisch skaliert sind. Der Kreis im Ursprung der jeweiligen Histogramme repräsentiert die Referenzposition der analysierten Partikel, deren Nachbarpositionen aufgetragen werden. In jedem der Histogramme zeigt sich eine in Abstand und Winkel systematische Partikelanordnung.

Im Bereich der einschichtigen Strömung ordnen sich die Partikel wie auf einer Perlenkette an. Der mittlere Partikelabstand beträgt im betrachteten Bereich in etwa $d_{\text{Part}, 4:00 \text{ h}} = (220 \pm 30) \mu\text{m}$. Im Bereich der zweischichtigen Strömung zeigt sich eine hexagonale Struktur. Je nachdem, ob ein Partikel von der inneren oder von der äußeren Schicht zur Analyse herangezogen wird, erscheinen die Nachbarn im Histogramm mit positivem oder negativem radialen Versatz. Bemerkenswertes Resultat dieser Analyse ist, dass sich die Partikelschichten um einen halben Partikelabstand versetzt anordnen, also „auf Lücke“ sitzen.

¹ Aufgrund der Dicke des Laserfächers von $d_L \approx 120 \mu\text{m}$ ist ein geringer Versatz der Partikel in z -Richtung möglich. Diese Dicke ist jedoch kleiner als der Schichtabstand [s. Abb. 5.5 (d) und folgender Abschnitt], so dass im Wesentlichen nur eine Gitterebene ausgeleuchtet werden sollte.

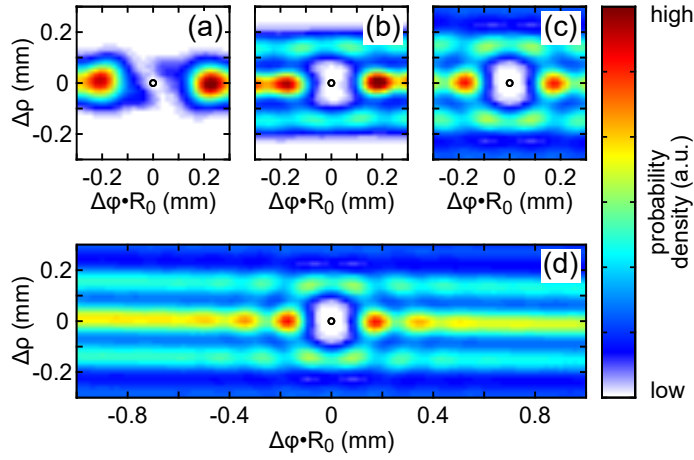


Abbildung 5.6: Darstellung der Interpartikelordnung im End-On View des kristallinen Torus. Die einzelnen Abbildungen zeigen Nachbarschaftshistogramme in φ - ρ -Darstellung für verschiedene Winkelpositionen. (a) $\varphi \approx 4:00$ h, (b) $\varphi \approx 8:00$ h und (c) $\varphi \approx 11:30$ h, (d) vergrößerter Ausschnitt des Histogramms der Interpartikelordnung bei $\varphi \approx 11:30$ h. In toroidaler Richtung sind die drei nächsten Nachbarn erkennbar. Die Analyse der Daten ergibt, dass die Kohärenzlänge bei $d_{\text{coh}} > 400 \mu\text{m}$ liegt. (Grafik nach Ref. [120])

Der (axiale) Interpartikelabstand beträgt hier $d_{\text{Part}, 8:00 \text{ h}} = (185 \pm 30) \mu\text{m}$, der Abstand zwischen den Schichten $d_{\text{Lay}, 8:00 \text{ h}} \approx 145 \mu\text{m}$. Letzterer Wert kann auch direkt in den mittleren Stromlinien in Abb. 5.5 (d) abgelesen werden. Der Faktor von 0,78 zwischen diesen beiden Größen (Interpartikelabstand und Schichtabstand) stimmt in etwa mit dem Faktor zwischen Partikel- und Netzebenenabstand einer dichtesten Kugelpackung von 0,82 überein und hängt damit zusammen, dass die Partikel nicht nur in toroidaler, sondern auch in axialer Richtung etwas versetzt zueinander strömen¹.

Abbildung 5.6 (c) zeigt die Situation im dreischichtigen Bereich. Die hexagonale Ordnung ist hier noch deutlicher ausgeprägt als zuvor. Jede der Stromlinien ist im Vergleich zu der/den Nachbarschicht(en) um einen halben Interpartikelabstand verschoben. Der mittlere Interpartikelabstand beträgt hier $d_{\text{Part}, 11:30 \text{ h}} = (175 \pm 30) \mu\text{m}$ und der Schichtabstand ist unverändert bei $d_{\text{Lay}, 11:30 \text{ h}} \approx 145 \mu\text{m}$. In Abb. 5.6 (d) ist ein größerer Ausschnitt der Paar-korrelationsfunktion aus diesem Winkelbereich dargestellt. Hieraus wird ersichtlich, dass die systematische Ordnung der Partikel in der Strömung verhältnismäßig langreichweitig ist und die nächsten drei Nachbarn in und gegen die Strömungsrichtung noch lokalisiert sind. Die Analyse der Abnahme der Höhe der Peaks ergibt, dass die Kohärenzlänge bei $d_{\text{coh}} > 400 \mu\text{m}$ liegt.

¹ Der Wert 0,82 für den Quotienten basiert auf der Annahme, dass die Ebenen der Schichten in der Art geordnet sind, dass im Falle des entwundenen Torus (φ - z - ρ -Darstellung) geschlossene – also dichte – Partikelflächen in ρ -Richtung übereinander geschichtet werden. In diesem Falle entspricht der Schichtabstand der Höhe eines regelmäßigen Tetraeders, dessen Kantenlänge der Interpartikelabstand ist.

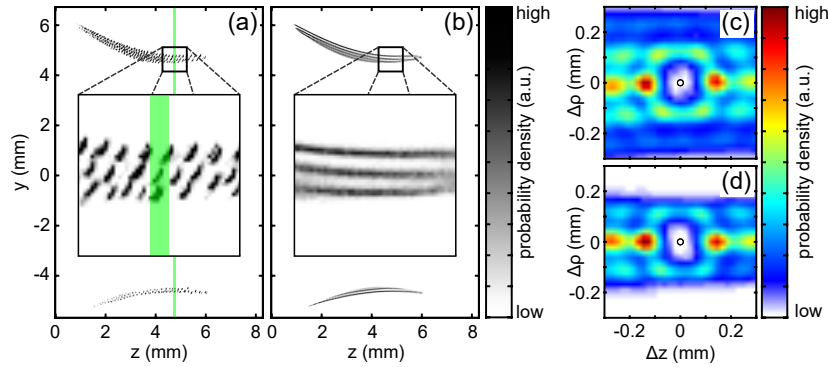


Abbildung 5.7: Darstellung zu der Interpartikelordnung in POINCARÉ-Schnitten (Querschnittsflächen der Strömung) des kristallinen Torus. (a) Invertiertes Einzelbild einer Aufnahme eines kristallinen Staubtorus. Die Position des Laserfächers für die vorangegangenen Beobachtungen im End-On View ist in grüner Farbe markiert. Die nun betrachtete z - y -Schnittebene liegt in etwa bei $x = 0$ mm, so dass die obere Punktwolke den Strömungsquerschnitt bei $\varphi \approx 12:00$ h darstellt und die untere den Schnitt bei $\varphi \approx 6:00$ h. Die vergrößerte Darstellung im Bildzentrum zeigt den Bereich des Torus, in dem die vorangegangenen Auswertungen durchgeführt wurden und auf den sich auch die folgende Analyse bezieht. (b) Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthalt der Partikel in der analysierten Schnittebene. Das Bild wurde durch Summation vieler Einzelbilder erzeugt und entspricht somit einer Langzeitbelichtung. Wie in den vorangegangenen Analysen ist die Schichtstruktur direkt erkennbar. (c) Histogramme der Interpartikelordnung in der z - ρ -Ebene bei $\varphi \approx 12:00$ h und (d) bei $\varphi \approx 6:00$ h. (Grafik nach Ref. [120])

5.3.3 Struktur im Strömungsquerschnitt

Um der Dreidimensionalität des Systems – und damit der Dreidimensionalität der Partikelanordnung – Rechnung zu tragen, soll nun auch eine Strukturanalyse im Strömungsquerschnitt erfolgen. Aus diesem Grunde wird im Folgenden analog zum vorangegangenen Abschnitt eine einzelne Schnittebene im Torus betrachtet, die in diesem Fall jedoch quer zur Staubströmung verläuft und den Torus bei der 12:00 h- und der 6:00 h-Position schneidet (siehe Stichpunkt „Side-On View“ in Abschn. 4.1). Auf diese Weise entstehen die zwei POINCARÉ-Schnitte, die in Abb. 5.7 (a) und (b) dargestellt sind. Hierbei handelt es sich bei der linken Abbildung um ein Einzelbild der Aufnahme, bei dem rechten Bild um eine Langzeitbelichtung, die die mittlere Strömung wiedergibt. Für die Analyse der Partikelordnung wurde der axiale Bereich ausgewählt, in dem auch zuvor die Ordnung in Strömungsrichtung untersucht wurde ($z \approx 5 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$). Ein Bildausschnitt dieses dreischichtigen Bereichs ist in den Bildern vergrößert dargestellt. Auch hier ist die Schichtstruktur deutlich zu erkennen und bestätigt die Ergebnisse der vorangegangenen Analysen.

Veränderungen der Experimentparameter führten, wie zuvor erwähnt, zu einer Veränderung der Einschlussgeometrie, die wiederum eine Streckung des Torus in axialer Richtung zur Folge hatte. Dies ist im dargestellten Schnitt deutlich zu erkennen. Darüber hinaus sind die Schnitte entlang des axialen Verlaufes gekrümmt, mit dem Abstand zur Anode verändert sich der große Radius des Torus.

Abbildungen 5.7 (c) und (d) zeigen die 2D-Paarkorrelationsfunktion für die Schnitte bei 12:00 h und 6:00 h. Analog zum vorangegangenen Abschnitt wurden die Nachbarschaftshistogramme der entsprechenden Bereiche aller Einzelbilder angefertigt und überlagert.

In beiden Darstellungen ist erneut eine hexagonale Struktur zu erkennen. In axialer Richtung sind die Partikelschichten um einen halben Interpartikelabstand gegeneinander verschoben. Im Vergleich zum End-On View finden sich in den vorliegenden Abbildungen etwas kleinere Partikelabstände von $d_{\text{Part}, 6:00\text{h}/12:00\text{h}} = (145 \pm 30) \mu\text{m}$ und ein kleinerer Schichtabstand von $d_{\text{Lay}, 6:00\text{h}/12:00\text{h}} = (110 \pm 20) \mu\text{m}$. Die Ursachen dieser Unterschiede können vielfältig sein. Unsicherheiten in der genauen Bestimmung der Position des Lasers, perspektivische Effekte, die Längenkali brierung für den vorliegenden Fall und der zeitliche Versatz zwischen den Aufnahmen sind nur einige der möglichen Fehlerquellen. Diese Unsicherheiten betreffen jedoch lediglich die absolute Kalibrierung. Die Struktur der Partikelanordnung ist unabhängig von dieser Skalierung.

Insgesamt zeigt die Analyse der Partikelanordnung mittels der Paarkorrelationsfunktion in beiden untersuchten Schnitten (x - y - und y - z -Schnitt) in diesem dünnen Torus Muster, die einem regelmäßigen Hexagon ähneln, der Struktur, die auch bei dichtesten Kugelpackungen zu erwarten wäre. Bei der Bewertung der Muster sind jedoch zwei Effekte zu berücksichtigen: Zum einen hat der verwendete Laserfächer eine Dicke, so dass die abgebildeten Partikel einen Versatz in eben dieser Richtung aufweisen könnten. Zum anderen wurde zwar versucht, in Symmetrieebenen des Torus zu messen, jedoch muss dies nicht zwangsläufig – sofern denn ein kristallartiger Zustand vorliegt – auch eine kristallografische Hauptebene sein.

Zur Vervollständigung des Bildes wird im Folgenden zunächst ein Vergleich mit der Struktur in einem simulierten Staubs torus vorgenommen und anschließend eine Diskussion über den Aggregatzustand der Strömung geführt.

5.3.4 Strukturanalogien zwischen Experiment und Simulation

Die bisherigen Analysen bezogen sich auf Daten aus dem Laborexperiment. Im Folgenden werden nun dieselben Analysemethoden auf einen Datensatz aus LD-Simulationen angewendet. Auf diesem Wege wird überprüft, ob die Simulation die Mikrostruktur der Staubströmung korrekt abzubilden vermag und so als Werkzeug für ein Strukturstudium der Mikrophysik der Strömung in Frage kommt. Die Daten für diese Auswertung entstammen dem Simulationslauf, der bereits in Abschn. 5.3.1 vorgestellt wurde und die experimentelle Situation in Bezug auf Deformation, Schichtstruktur und Strömungsgeschwindigkeit gut nachempfunden. Um eine dem experimentellen Fall analoge Datenform zu erreichen, wird für die Analysen jeweils eine Auswahl der Datenpunkte getroffen, die der Beleuchtung mit einem Laserfächer im Laborexperiment entspricht. Abbildung 5.8 (a) zeigt einen zentralen Schnitt eines Zeitschritts der Simulation. Wie bereits im Falle des Einzelbildes der Aufnahme des Experiments zeigt sich bereits hier ein sehr hoher Grad an Ordnung.

Innerhalb des dreischichtigen Bereichs dieser Strömung wird nun die Nachbarschaftsanalyse entsprechend Abschn. 5.3.2 durchgeführt. Das Ergebnis dieser Auswertung für $\varphi \approx 7:00\text{h}$ ist in Abb. 5.8 (b) dargestellt. Erneut sind benachbarte Schichten um etwa einen halben Interpartikelabstand gegeneinander verschoben, so dass sich rund um das Zentrum auch hier eine hexagonale Struktur ausbildet. Der Interpartikelabstand beträgt hier $d_{\text{Part}, 7:00\text{h}} = (165 \pm 20) \mu\text{m}$ und der Schichtabstand $d_{\text{Lay}, 7:00\text{h}} \approx (130 \pm 20) \mu\text{m}$. Der Quotient aus Schicht- und Partikelabstand beträgt 0,79. Neben der Ähnlichkeit der Struktur stimmen also auch die Absolutwerte der Abstände in diesem Torusschnitt mit den Ergebnissen aus dem Laborexperiment überein.

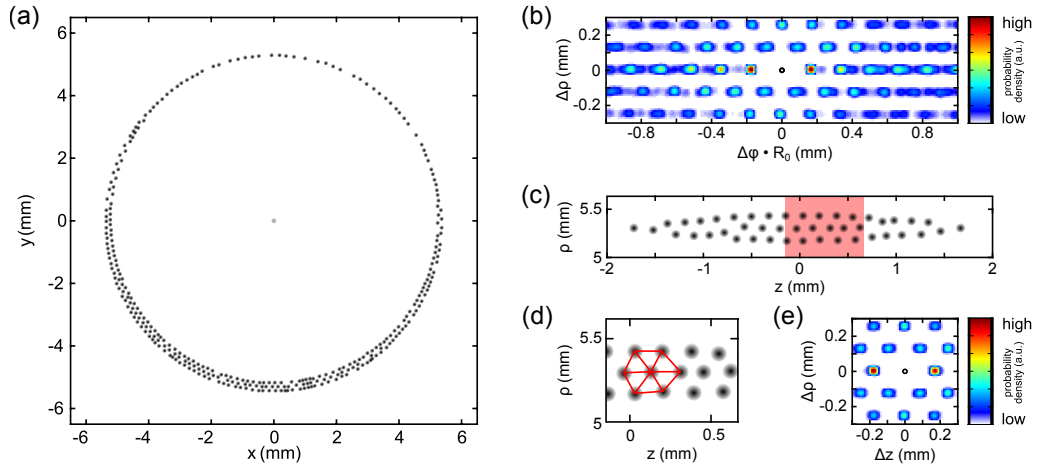


Abbildung 5.8: Strukturanalyse in einem simulierten Torus. (a) Zentraler Schnitt (x - y -Ebene) eines Zeitschnittes des simulierten Torus. Analog zum Einzelbild des Laborexperimentes zeigt sich bereits hier eine hohe Ordnung. (b) Nachbarschaftsanalyse mittels 2D-Paarkorrelationsfunktion in der x - y -Ebene im Bereich von $\varphi \approx 7:00$ h. (c) Strömungsquerschnitt nahe der $\varphi \approx 7:00$ h-Position. Der rot markierte Bereich ist in (d) vergrößert dargestellt. (e) 2D-Paarkorrelationsfunktion im Strömungsquerschnitt im Bereich $\varphi \approx 7:00$ h.

Analog zum Vorgehen bei der Auswertung der Daten aus dem Laborexperiment wird die Analyse auch in einem Strömungsquerschnitt durchgeführt. Ein solcher Querschnitt ist für $\varphi \approx 7:00$ h als synthetisches Einzelbild einer Videoaufnahme in Abb. 5.8 (c) und in Abb. 5.8 (d) gezeigt. Der Torusquerschnitt zeigt analog zum Fall des Laborexperiments eine deutlich größere Ausdehnung in z -Richtung als in ρ -Richtung. Im zentralen Bereich sind drei Schichten zu erkennen. Nach außen hin verschwindet die innere Schicht und die äußeren Schichten laufen zusammen. Auch in diesem Torusquerschnitt ist mit bloßem Auge ein hohes Maß an Ordnung zu erkennen. In der Vergrößerung ist zur Verdeutlichung ein Hexagon eingezeichnet.

Diese Struktur ist auch in der Nachbarschaftsanalyse wiederzufinden. Erneut ist die Verschiebung der Schichten gegeneinander gut zu erkennen, die zur Ausbildung der sechseckigen Nachbarschaften führt. Die Analyse liefert einen mittleren Interpartikelabstand von $d_{\text{Part}, 7:00 \text{ h}} = (170 \pm 20) \mu\text{m}$ und einen Schichtabstand von $d_{\text{Lay}, 7:00 \text{ h}} = (125 \pm 20) \mu\text{m}$. Die Unterschiede dieser Werte gegenüber dem zunächst betrachteten x - y -Schnitt liegen unterhalb der Analyseauflösung von $10 \mu\text{m}$ und deutlich im Rahmen der Fehlerabschätzung.

Der Vergleich dieser Strukturanalyse mit den experimentellen Daten zeigt in allen Bereichen eine gute Übereinstimmung: Die Interpartikelordnung weist in den Simulationen die gleiche Struktur auf, wie sie experimentell im End-On View und im Side-On View gefunden wurde. Auch die Absolutwerte der Partikel- und Schichtabstände liegen nahe beieinander. Darüber hinaus kann die sehr gute Übereinstimmung des Quotienten aus Schichtabstand und Interpartikelabstand als Hinweis darauf verstanden werden, dass es sich in beiden Fällen tatsächlich um die gleiche Struktur handelt und die Simulation somit als Werkzeug zum Studium der Mikrophysik der Staubströmung herangezogen werden kann.

5.3.5 Diskussion des Aggregatzustands der Strömung

Der hohe Grad an Winkel- und Abstandsordnung in der 2D-Paarkorrelationsfunktion sowie die Lokalisierung der Partikel über mehrere Interpartikelabstände hinweg weisen auf eine kristallartige Ordnung hin. Neben dieser Analyse kann eine weitere zentrale Größe zur Bestimmung des Aggregatzustandes eines staubigen Plasmas herangezogen werden: der Kopplungsparameter $\Gamma = q_d^2 / (4\pi a_{\text{WS}} k_B T_d)$ (vgl. Abschn. 2.1.4). Zur Berechnung dieser Größe werden die benötigten Kennzahlen für den verwendeten Parameterbereich abgeschätzt und jeweils unter Berücksichtigung des Fehlers in die Berechnung einbezogen. Aus dem Interpartikelabstand von $d_{\text{part}} \approx 180 \mu\text{m}$ lässt sich unter der Annahme einer hexagonalen Partikelanordnung eine Staumdichte von $n_d \approx 240 \text{ mm}^{-3}$ berechnen und hieraus wiederum ein WIGNER-SEITZ-Radius von $a_{\text{WS}} \approx 100 \mu\text{m}$. Um im vorliegenden Fall den Kopplungsparameter nicht zu überschätzen, wird für die Staublading eine Ladungsreduktion angenommen und entsprechend dem Ladungsmodell unter Berücksichtigung von Ionen-Neutral-Stößen die Staublading auf $q_d \approx 750e$ abgeschätzt. Dieser Wert ist ausgesprochen gering angesetzt und beträgt weniger als ein Drittel der Ladung, die die Verwendung des OML-Modells liefern würde. Es verbleibt noch eine Abschätzung für die Staubtemperatur. Da sämtliche Störungen unterdrückt sind und die Bewegungen sehr langsam ablaufen, wird in grober Näherung angenommen, dass die Staubtemperatur nahe der Temperatur des Hintergrundgases liegt, also $T_d \approx 300 \text{ K}$. Insgesamt ergibt sich so ein Kopplungsparameter von $\Gamma = 315$. Dieser Wert liegt in einer Größenordnung, die typisch für kristalline Staubcluster ist [125, 156, 265].

Es bleibt anzumerken, dass die Abschätzung der Staubtemperatur auf den Wert des Hintergrundgases unter Umständen problematisch sein kann. So wurden in der Vergangenheit sowohl in Laborplasmen für mehrlagige dreidimensionale Staubsysteme [29, 272, 273] als auch in ausgedehnten Staubwolken unter Schwerelosigkeit [274] kinetische Temperaturen über dem Hintergrundniveau gemessen. Ursachen für die Aufheizung der Partikel werden in der Regel in kollektiven Phänomenen, wie beispielsweise SCHWEIGERT-Instabilitäten [90], und in der Wechselwirkung der Partikel mit dem Plasma gesehen [143–145, 275, 276]. Auch für den vorliegenden Fall können derlei Effekte nicht ausgeschlossen werden. Die genaue experimentelle Ermittlung der kinetischen Temperatur, wie sie beispielsweise von SCHMIDT mit hohem technischen Aufwand realisiert wurde [144, 145, 276], ist am verwendeten experimentellen Aufbau nicht möglich. Durch die vorsichtige Abschätzung der Staublading, die bei der Berechnung des Kopplungsparameters im Zähler quadratisch eingeht, ergibt sich bei der Berechnung jedoch bereits ein „Sicherheitsfaktor“ von 10 (im Vergleich zum klassischen OML-Wert). Um diesen auszugleichen, wäre eine Staubtemperatur von $T_d \approx 3000 \text{ K}$ möglich. Der hohe Grad an Ordnung und die geringe „rattling“-Bewegung¹ der Staubpartikel widersprechen jedoch solch einer hohen Temperatur.

Auch die Analyse mittels der 2D-Paarkorrelationsfunktion unterstützt den Eindruck der starken Kopplung und des kristallinen Zustands. In den Histogrammen bildet sich um das Zentralpartikel stets eine „verbotene Zone“ aus, also ein Bereich, in dem keine Nachbarn zu finden sind (vgl. Abschn. 2.1.4). Die Deutlichkeit und Größe, in der dieses Phänomen auftritt, sowie die Winkelordnung und die lange Reichweite der Ordnung widersprechen einem klassischen flüssigen oder auch einem glasartigen bzw. unterkühlten Zustand.

¹ Mit „rattling“-Bewegung wird im vorliegenden Kontext die erratische Bewegung eines Partikels um seine Gleichgewichtslage im Wechselwirkungspotential seiner Nachbarn bezeichnet.

Durch die Verformung der Querschnittsfläche bildet die Strömung statt kreisrunder Schalen, wie sie bei einem biharmosichen Confinement mit gleicher Fallfrequenz in ρ - und z -Richtung auftreten, flache Schichten ähnlich einem Zylindermantel aus. Das Verhalten solcher Schichtstrukturen in engen Kanälen ohne Krümmung wurde für den statischen Fall bereits untersucht – sowohl experimentell, beispielsweise von TENG *et al.* [277], als auch mittels LD-Simulationen, unter anderem von KLUMOV *et al.* [278–280]. Trotz der Unterschiede in der Geometrie und bei den Experimentparametern finden sich gute qualitative Übereinstimmungen mit den Ergebnissen für den dynamischen Fall. Genau wie in den in diesem Kapitel vorgestellten Untersuchungen bildeten sich dort geschichtete Strukturen als typischer Gleichgewichtszustand aus. Darüber hinaus zeigte die relative Partikelordnung eine Kristallisation stets bevorzugt in hcp-, fcc- oder bcc-Gitterstruktur.

Die beschriebene Variation der Anzahl der Schichten entlang der Strömung entspricht den Erfahrungen aus vorherigen Simulationen (mit kreisrunden Strömungsquerschnitten) [115, 116]. Genau wie dort findet sich der Zusammenhang: Je schneller der Staub strömt, desto weniger Schichten existieren und umgekehrt. Der Ursprung für dieses Verhalten kann in der Flusskontinuität und der quasi-inkompressiblen Staubwolke gesehen werden. Im gezeigten Fall laufen die Bifurkationen, die zur Veränderung der Schichtzahlen führen, glatt und ohne Störungen ab. In diesem Sinne handelt es sich also um eine Abfolge laminarer Strömungszustände. Die weichen Übergänge zwischen verschiedenen Strömungszuständen entsprechen strukturellen Phasenübergängen und wurden in ähnlicher Form bereits in früheren LD-Simulationen beobachtet. Dort konnte die Dämpfung von Störbewegungen der Neutralgasreibung zugeschrieben werden und es wurde festgestellt, dass das System die Eigenschaft aufweist, sich stets in einem adiabatischen Gleichgewichtszustand zu befinden [116, 200].

5.4 Zusammenfassung und Diskussion der experimentellen Untersuchung kristalliner Staubströmungen

Insgesamt wurde in diesem Kapitel gezeigt, dass zusätzliche Heizmechanismen, wie beispielsweise Staubbichtewellen oder auch Fluktuationen im anodischen Plasma, die Kristallisation der Staubströmung verhindern können. Das Auftreten der Staubbichtewellen zeigt Ähnlichkeiten mit dem Auftreten radial propagierender Wellen in Hochfrequenzentladungen mit Nanostaub [281] oder auch mit staubigen Plasmen unter Schwerelosigkeit [282]. Hier wie dort können sich selbsterregte Dichtewellen ausbilden, die vom Void aus radial nach außen propagieren. Im letzteren Fall wurde darüber hinaus über die Ausbildung von Frequenzclustern innerhalb des Wellenfeldes berichtet [283]. Das Auftreten dieser Strukturen konnte für den vorliegenden Fall nicht gezeigt werden.

Durch die gezielte Variation der Entladung konnte das Einschlusspotential dahingehend geändert werden, dass ein störungsfreier Staubeinfang möglich wurde. Hierfür wurde ausgenutzt, dass die Systemdimension in Richtung der Ionenströmung eine Mindestgröße von einigen Wellenlängen überschreiten muss, damit sich selbsterregte Staubbichtewellen ausbilden können. Durch Reduktion dieser Systemdimension konnte die Wellenanregung unterbunden werden.

Die sich für den ungestörten Fall einstellende Staubströmung in mehreren Schichten weist in Bezug auf die Winkel- und Abstandsordnung kristalline Eigenschaften auf. Die Anordnung der Partikel auf strömenden Schichten bildet ein verformtes Analogon zur bereits im Rahmen von Simulationen beschriebenen Kristallisation eines Torus mit kreisrundem Querschnitt in Schalen. Die Interpartikelordnung innerhalb und zwischen den Schichten selbst weist Eigenschaften auf, wie sie bereits in statischen geschichteten Systemen in staubigen Plasmen beschrieben wurden [277–280]. Dort wie hier bildet die Schichtung der Partikel kristalline Ordnungen hohen Füllgrades aus – im statischen Fall bevorzugt in hcp-, fcc- oder bcc-Gitterstruktur und in der vorliegenden Untersuchung vermutlich in hcp- oder fcc-Struktur.

Neben kristallinen Ionenstrahlen, wie sie beispielsweise SCHÄTZ *et al.* [260] in einem Speicherring nachweisen konnten, sind die hier präsentierten Ergebnissen bisher der einzige experimentelle Nachweis kristalliner Strömungen stark gekoppelter COULOMB- oder YUKAWA-Systeme. Die Tatsache, dass die hier untersuchte Staubströmung stationär und makroskopisch ist, ermöglicht Untersuchungen mit verhältnismäßig bescheidenen Mitteln. Darüber hinaus sorgen die strukturellen Phasenübergänge, die aus der Inhomogenität der Strömung resultieren, für eine Erweiterung der experimentell zugänglichen Fragestellungen im Vergleich zu den starr rotierenden Strömungen in einem Speicherring.

LANGEVIN-Dynamik-Simulationen, die die veränderte experimentelle Situation nachempfinden, können die Staubströmung in weiten Teilen sowohl in Bezug auf makroskopische Strömungseigenschaften als auch in Bezug auf die mikroskopische Ordnung gut nachempfinden. Die Schichtstruktur, die Form der Strömungsquerschnitte, der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Veränderung der Schichtzahl sowie auch die mikroskopische Partikelordnung zeigen in beiden betrachteten Schnitten nicht nur qualitative, sondern auch gute quantitative Übereinstimmung.

Ausgehend von diesen Erkenntnissen soll im Folgenden zunächst eine Modellvorstellung entwickelt werden, die das makroskopische Strömungsverhalten des Staubtorus zu erklären und zu charakterisieren vermag. Im Anschluss hieran soll dieses analytische Modell dann mittels LD-Simulationen überprüft werden. Darüber hinaus wird die Analogie zwischen den Mikrostrukturen der Strömung im Laborexperiment und den Mikrostrukturen der simulierten Strömung im Kap. 7 genutzt. Hier wird die Mikrophysik der inhomogenen Strömung, die im Laborexperiment nur bedingt zugänglich ist, mittels detaillierter LD-Simulationen eingehend untersucht. In Kap. 8 wird eine Analyse vorgestellt, die zeigt, dass die Ergebnisse des Laborexperimentes, in denen elliptisch verformte Staubtori untersucht wurden, repräsentativ für eine ganze Klasse von Tori sind. In diesem Sinne besitzen Ergebnisse unabhängig vom Strömungsquerschnitt Gültigkeit, sofern gewisse Voraussetzungen erfüllt sind.

6 | Hydraulic Jumps in toroidalen Staubströmungen

In toroidalen Staubströmungen kommt es unter bestimmten Bedingungen zu schockartigen Übergängen, bei denen sich die Strömung schlagartig verlangsamt und hohe kinetische Temperaturen auftreten. Das folgende Kapitel setzt sich mit der Modellierung und der Erklärung dieser Ereignisse im Sinne eines „Hydraulic Jump“ auseinander.

Schockartige Phänomene sind der menschlichen Wahrnehmung im Alltag durchaus bekannt. Ein Beispiel ist der Überschallknall in Luft, der auftritt, sobald sich ein Objekt mit Schallgeschwindigkeit oder schneller bewegt. In diesem Falle überlagern sich die ausgesendeten Schallwellen zu einer Schockfront, die hinter dem Objekt einen sogenannten MACH'schen Kegel bildet und vom menschlichen Ohr als Knall wahrgenommen wird. Diese Art der Schockwellen wurden auch in staubigen Plasmen entdeckt und untersucht, sowohl in 2D-Systemen [34, 37, 284] als auch in 3D-Systemen [285–287].

Ein weiteres – namentlich weniger bekanntes – schockartiges Phänomen kann bei dem Einlauf von Wasser in ein Waschbecken beobachtet werden (vgl. Abb.6.1). Rund um den Auftreffpunkt des Wasserstrahls bildet sich ein Bereich, in dem das Wasser mit hoher Geschwindigkeit und geringer Tiefe nach außen strömt. Nach einer gewissen Strecke tritt eine schlagartige Zunahme der Wassertiefe auf und die Strömung verlangsamt sich. Dieses Phänomen wird „Hydraulic Jump“ genannt. Es tritt in ähnlicher Form in einer Vielzahl hydrodynamischer Systeme auf und wird im Bereich des Wasserbaus gezielt zur Manipulation von Strömungen eingesetzt [288]. Doch auch das oben ausgeführte Beispiel erfreut sich in der Wissenschaft noch immer großer Beliebtheit und ist Gegenstand der Grundlagenforschung [289–292].

Beide vorgestellten Phänomene – MACH'scher Kegel und Hydraulic Jump – verbindet, dass sie einen schockartigen Übergang bei einer kritischen Grenzgeschwindigkeit bilden, jedoch sind zwei bemerkenswerte Unterschiede festzuhalten:

1. Überschallknall und MACH'scher Kegel kommen in gasförmigen, das heißt kompressiblen Medien vor. Ihr Auftreten basiert auf der Ausbreitung von Kompressionswellen, also longitudinalen Schwingungen. Hydraulic Jumps kommen in inkompressiblen Strömungen von Fluiden vor. Ihr Auftreten basiert auf Oberflächenwellen, also transversalen Schwingungen.
2. Überschallknall und MACH'scher Kegel entstehen, wenn die kritische Geschwindigkeit (die Schallgeschwindigkeit) von unter- zu überkritisch durchschritten wird. Bei dem Hydraulic Jump ist es umgekehrt: Das schockartige Phänomen tritt bei der Reduktion der Geschwindigkeit und Unterschreitung einer kritischen Geschwindigkeit auf.



Abbildung 6.1: Foto des Wassereinflaßes in ein Waschbecken. Nach dem Auftreffen strömt das Wasser schnell mit geringer Tiefe nach außen. In einem gewissen Abstand nimmt die Wassertiefe schlagartig zu und die Strömung verlangsamt sich. Die Position und Form dieses Hydraulic Jumps sind bei stabilen Strömungsverhältnissen stationär. (Foto: JOCHEN WILMS [cc-by 3.0])

Diese beiden Unterschiede motivieren, das Konzept des Hydraulic Jumps für das vorliegende Phänomen genauer zu betrachten: Zum einen ist das staubige Plasma im Staubtorus stark gekoppelt und erfüllt daher nicht ohne Einschränkungen die Ansprüche bezüglich der Kompressibilität, die an ein klassisches Gas gestellt werden. Zum Anderen tritt das schockartige Phänomen bei der Verlangsamung der Staubströmung auf, wie es auch bei dem hydrodynamischen Phänomen der Fall ist. Eine ausführliche Diskussion von Ähnlichkeiten und Unterschieden von aerodynamischen Schocks und Hydraulic Jumps wurde bereits 1950 von GILMORE *et al.* erarbeitet [293] und wird häufig in Beiträgen zu Untersuchungen zu Hydraulic Jumps aufgegriffen.

Zum besseren Verständnis der Modellierung des Hydraulic Jumps für unser System soll zunächst ein hydrodynamisches Modell für Kanalströmungen mit freier Oberfläche betrachtet werden. Anschließend wird dieses Modell auf die Situation der toroidalen Staubströmung übertragen.

6.1 Hydraulic Jumps in offenen Kanalströmungen

Im Bereich der Hydrodynamik, insbesondere im Kontext der Ingenieurwissenschaften, gehören Hydraulic Jumps zu den Basisphänomenen, die zum einen natürlich vorkommen, zum anderen aber auch gezielt im Wasserbau eingesetzt werden. Für weite Bereiche der Physik ist dieses Phänomen jedoch eher randständig, weshalb es hier in kurzen Worten anhand einer Kanalströmung mit rechteckigem Profil und mit freier Oberfläche erläutert werden soll. Die Ausführungen orientieren sich an dem Lehrbuch *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction* von HUBERT CHANSON [288] und den dort genannten Quellen.

Im Folgenden wird eine inkompressible, reibungsfreie Flüssigkeit betrachtet, die mit Geschwindigkeit v entlang eines eindimensionalen, waagerechten Kanals strömt. Die Situation ist in Abb. 6.2 skizziert. Der Grund des Kanals liege auf einer geodätischen Höhe von z_0 .

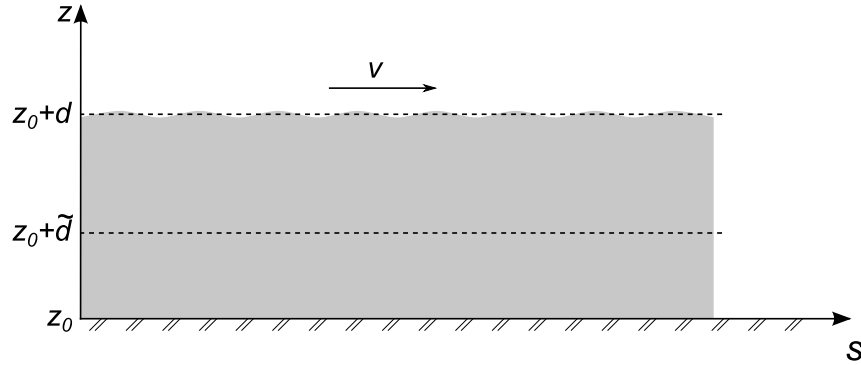


Abbildung 6.2: Skizze einer Kanalströmung mit freier Oberfläche. Das Wasser bzw. das Fluid strömt mit Geschwindigkeit v und Tiefe d in s -Richtung. Eine beispielhafte Stromlinie ist in der Höhe \tilde{d} über dem Grund als gestrichelte Linie eingezeichnet.

Die Kontinuitätsgleichung liefert, dass der Volumenstrom $Q = b d v$ mit der Kanalbreite b und der Kanaltiefe d durch jede Querschnittsfläche $A = b d$ konstant ist. Die Bernoulligleichung in der Formulierung als Höhengleichung lautet in diesem Fall

$$E = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z . \quad (6.1)$$

Hierbei bezeichnet E die spezifische Energie als Energiehöhe in Längeneinheiten (im Englischen „Head“ genannt), $v^2/(2g)$ die Geschwindigkeitshöhe der Strömung mit der Schwerkerebeschleunigung g und $p/(\rho g)$ die Druckhöhe mit dem hydrostatischen Druck p und der Massendichte des Fluids ρ . $z = z_0 + \tilde{d}$ bezeichnet die geodätische Höhe der betrachteten Stromlinie, die \tilde{d} über dem Grund des Kanals liegt. Damit liegt sie bezogen auf die freie Oberfläche der Strömung in der Tiefe $d - \tilde{d}$, und der hydrostatische Druck beträgt hier

$$p = \rho g (d - \tilde{d}) , \quad (6.2)$$

so dass sich die Höhengleichung vereinfacht zu

$$E(d) = \frac{v^2}{2g} + d + z_0 . \quad (6.3)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann der Einfachheit halber die Referenzhöhe z_0 des Kanalgrundes auf $z_0 = 0$ gesetzt werden. Unter Verwendung des konstanten Volumenstroms Q führt dies auf eine spezifische Energiekurve:

$$E(d) = \frac{Q^2}{2g b^2 d^2} + d . \quad (6.4)$$

Diese Kurve besitzt ein Minimum bei

$$d_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}} \quad (6.5)$$

mit der Energiehöhe

$$E_{\min} = \frac{3}{2} d_c \quad (6.6)$$

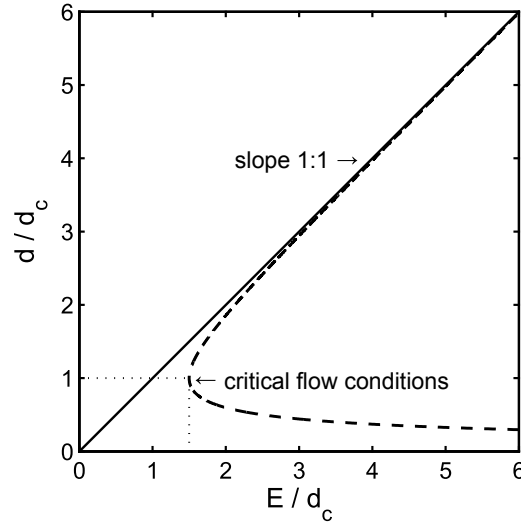


Abbildung 6.3: Darstellung der dimensionslosen spezifischen Energie einer Kanalströmung mit freier Oberfläche (gestrichelter Graph). Die durchgezogene Linie visualisiert eine Nullpunktsgerade mit Steigung eins, der sich der Graph der Energie asymptotisch annähert. Die kritische Strömungsbedingung wird am Scheitelpunkt des Graphen erreicht. (Abbildung in Anlehnung an Ref. [288] erstellt.)

bei der kritischen Strömungsgeschwindigkeit

$$v_c = \sqrt{d_c g} . \quad (6.7)$$

Durch Normierung der Höhengleichung mittels d_c wird eine dimensionslose spezifische Energiegleichung erhalten:

$$\frac{E(d)}{d_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{d_c}{d} \right)^2 + \frac{d}{d_c} . \quad (6.8)$$

Der Graph dieser Gleichung ist in Abb. 6.3 dargestellt. Auf der Abzisse ist die Energie aufgetragen, auf der Ordinate die Strömungstiefe. Das Minimum ist bezüglich der Energie der einzige eindeutige „Strömungsmodus“. Zu allen anderen möglichen Energien existieren stets zwei Lösungen: Eine langsame Strömung mit großer Tiefe – diese Lösungen werden subkritische oder unterkritische Strömungen genannt – und eine schnelle Strömung mit geringer Tiefe – die superkritischen bzw. überkritischen Lösungen.

Eine analoge Formulierung der dimensionslosen spezifischen Energiegleichung lautet

$$\begin{aligned} \frac{E(d)}{d_c} &= \frac{v^2}{2gd_c} + \frac{d}{d_c} \\ &= \frac{d}{d_c} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{dg} + 1 \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

und mit Hilfe der FROUDE-Zahl $Fr = v/\sqrt{gd}$:

$$\frac{E(d)}{d_c} = \frac{d}{d_c} \left(\frac{1}{2} Fr^2 + 1 \right) . \quad (6.10)$$



Abbildung 6.4: Das Foto zeigt einen Flusslauf von rechts nach links. Über den Fels strömt das Wasser mit superkritischer Geschwindigkeit mit verhältnismäßig geringer Tiefe. Hinter dem Hindernis trifft die schnelle Strömung auf einen tiefen Bereich, die Strömung wird subkritisch und ein Hydraulic Jump tritt auf. Es ist zu erkennen, wie sich von links her eine stehende Oberflächenwelle bildet. (Foto: GERIK CHIRLEK [cc0 1.0])

Die Geschwindigkeit im Nenner der FROUDE-Zahl \sqrt{dg} entspricht der Phasengeschwindigkeit c von Schwerewellen großer Wellenlänge l (im Vergleich zur Wassertiefe d). Für die Phasengeschwindigkeit dieser Wellen gilt zunächst

$$c^2 = \frac{gl}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{l}\right). \quad (6.11)$$

Mit der Näherung $\tanh(2\pi d/l) \approx 2\pi d/l$ für $d/l \ll 1$ ergibt sich

$$c = \sqrt{gd}. \quad (6.12)$$

Somit gilt für die FROUDE-Zahl

$$Fr = \frac{v}{c}, \quad (6.13)$$

wobei c die wassertiefenabhängige Phasengeschwindigkeit von Oberflächenwellen ist.

Vor diesem Hintergrund wird deutlich, dass die FROUDE-Zahl für kleine Oberflächenwellen in einem hydrodynamischen System ein Analogon zur MACH-Zahl in einem gasdynamischen System darstellt – es handelt sich jeweils um das Verhältnis aus der (Strömungs-) Geschwindigkeit und der Phasengeschwindigkeit einer kleinen Störung.

Aus informationstheoretischer Sicht geben FROUDE-Zahl und MACH-Zahl Auskunft darüber, wohin Störungen und damit Informationen propagieren können. Ist die jeweilige Geschwindigkeitskennzahl kleiner als eins, so kann eine Information stromauf- und stromabwärts laufen. Ist die Kennziffer größer als eins, so werden alle Informationen stromabwärts getragen. Ist die Geschwindigkeitskennzahl gleich eins, so kann sich eine stehende Welle aufbauen. Genau auf diese Weise entsteht ein Hydraulic Jump.

Ein Hydraulic Jump stellt einen Übergang von superkritischer ($Fr > 1$) zu subkritischer Strömung ($Fr < 1$) dar, wobei im subkritischen, stromabwärts gelegenen Bereich eine höhere Wassertiefe d_2 vorherrscht als im stromaufwärts gelegenen Bereich mit Tiefe d_1 . Ein solcher Übergang tritt beispielsweise auf, wenn ein Fluss hinter einer Stromschnelle oder einem Hindernis wieder langsam wird (vgl. Abb. 6.4) oder auch wenn eine Tidewelle in eine Flussmündung einläuft (vgl. Abb. 6.5).



Abbildung 6.5: Das Foto zeigt den Flusslauf Severn in Großbritannien. Die Strömung läuft im Bild von rechts nach links. Aufgrund des hohen Tidenhubs im Mündungsbereich des Flusses läuft eine Tidewelle der Flusströmung entgegen. Mit der Erhöhung der Flusstiefe kommt es so zu einem Hydraulic Jump. In einigen Bereichen ist der Hydraulic Jump derart ausgeprägt, dass Wellenreiter auf der langsam gegen die Strömungsrichtung des Flusses propagierenden Welle surfen können. (Foto: AUDREY HUDSON [cc-by-sa 2.0])

Grundsätzlich ist ein Hydraulic Jump durch starke Turbulenz und Energiedissipation geprägt und kann daher nicht durch die Bernoulligleichung beschrieben werden. Aus diesem Grunde bedient man sich – analog zum inelastischen Stoß – der Impulsbilanz. Hierbei werden die komplizierten, dissipativen Vorgänge, die während des eigentlichen Hydraulic Jumps auftreten, aus der Betrachtung weitestgehend ausgespart und der Blick auf zwei Strömungsquerschnittsflächen gerichtet, die das „Kontrollvolumen“ begrenzen. Die erste Fläche befindet sich orthogonal zur Strömungsrichtung vor dem Hydraulic Jump, die zweite dahinter, jeweils in der laminaren, unverscherten Strömung. Diese Situation ist in Abb. 6.6 skizziert.

Der hydrostatische Druck bewirkt auf die Grenzflächen jeweils eine Gesamtkraft von

$$F_P = \frac{1}{2} \rho g b d^2 . \quad (6.14)$$

Im Bereich der homogenen Strömung sind diese Kräfte im Gleichgewicht, jedoch gilt offensichtlich, dass für die zwei verschiedenen Strömungstiefen unterschiedliche Kräfte wirken ($F_{P,1} < F_{P,2}$). Die Differenz stammt aus der Impulsänderung während des Hydraulic Jumps. Im Bereich der laminaren Strömung, in dem sich das Fluid unverschert mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, gilt jeweils

$$\begin{aligned} F_{\text{Imp}} &= \dot{p} \\ &= \dot{m}v + m\dot{v} \\ &= \rho Q v + 0 . \end{aligned} \quad (6.15)$$

Somit ergibt sich aus der Gesamtbilanz ($F_{P,1} + F_{\text{Imp},1} = F_{P,2} + F_{\text{Imp},2}$):

$$\rho Q (v_1 - v_2) = \frac{1}{2} \rho g b (d_2^2 - d_1^2) . \quad (6.16)$$

Zusammen mit der Kontinuitätsbedingung $Q = b d v = \text{const.}$ liefert diese Gleichung nach einer kurzen Rechnung den relativen Anstieg der Wassertiefe:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1 \right) . \quad (6.17)$$

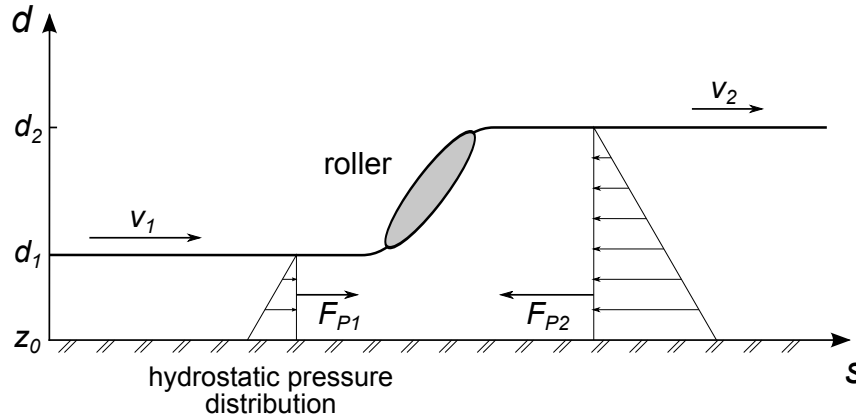


Abbildung 6.6: Skizze eines klassischen Hydraulic Jumps in einer Kanalströmung im Profil. Das Fluid strömt zunächst mit hoher Geschwindigkeit v_1 und geringer Tiefe d_1 in s -Richtung. Durch den Hydraulic Jump, der zu einer großen Turbulenz – in der Hydrodynamik „Roller“ genannt – führen kann, wird die Strömung subkritisch und strömt anschließend langsam mit Geschwindigkeit v_2 und großer Tiefe d_2 . Die senkrechten Flächen markieren die Randflächen des Kontrollvolumens, auf welche die Druckkraft von beiden Seiten wirkt.

Dieser Anstieg ist vollständig durch die FROUDE-Zahl im superkritischen Bereich Fr_1 charakterisiert.

Im Wasserbau findet ein solcher Hydraulic Jump insbesondere zur Dissipation von Strömungsenergie Anwendung, beispielsweise zum Uferschutz oder bei Überfallwehren. Im Folgenden soll nun dieses Modell des Hydraulic Jumps auf eine Situation übertragen werden, die der Staubströmung im Torus ähnelt.

6.2 Zylindersymmetrische, inkompressible Staubströmungen in harmonischen Confinements

Im folgenden Abschnitt wird das Modell des Hydraulic Jumps auf ein System übertragen, das dem Staubtorus ähnelt – allerdings unter Vernachlässigung der Krümmung der Gesamtströmung. Die Ergebnisse, die in diesem Abschnitt präsentiert werden, wurden 2016 in ähnlicher Form von PIEL und WILMS in Ref. [121] veröffentlicht.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist eine gerade Staubströmung mit kreisrundem Querschnitt, die in einem zylindrischen Koordinatensystem betrachtet wird. Hierbei bezeichnet r die radiale Entfernung zum Strömungszentrum und z die Hauptachse der Strömung. Diese Geometrie stellt eine Vereinfachung der toroidalen Staubströmung dar, in der Krümmungs- und Zentrifugaleffekte vernachlässigt werden. Der Staub strömt unverschert, das heißt, im gesamten Querschnitt mit der Geschwindigkeit v in $+z$ -Richtung, und wird in radialer Richtung durch ein harmonisches Einschlusspotential mit Eigenfrequenz ω_0 zusammengehalten. Weiterhin wird in diesem Modell von einer konstanten Massendichte $\rho = nm$ ausgegangen, mit der konstanten Teilchendichte n und der Masse eines Partikels m . Diese Näherung ist zulässig, da Systeme mit nur wenigen Schalen und damit mit kleinem Strömungsdurchmesser betrachtet werden. Hier kann das Dichteprofil, analog zu kleinen YUKAWA-Bällen [60], in erster Näherung noch als konstant angenommen werden.

Das radiale Confinement führt innerhalb der Staubwolke zu einem „hydrostatischen Gleichgewicht“ mit Druckgradient

$$\frac{dp}{dr} = -\rho\omega_0^2 r . \quad (6.18)$$

Hieraus resultiert das radiale hydrostatische Druckprofil

$$p(r) = \frac{1}{2}\rho\omega_0^2 (R^2 - r^2) . \quad (6.19)$$

Die freie Oberfläche wird in diesem Falle bei dem Radius R angenommen. Eine analoge Formulierung der Druckgleichung in Abhängigkeit der Strömungsquerschnittsfläche $A(r) = A_r = \pi r^2$ lautet

$$p(A_r) = \frac{1}{2\pi}\rho\omega_0^2 [A(R) - A(r)] . \quad (6.20)$$

Auch im Falle des Staubtorus kann es noch einen externen Druckanteil p_{ext} geben. Dieser konstante Druck entspricht der geodätischen Höhe z_0 in der Bernoulligleichung der Kanalströmung (in der Formulierung als Höhengleichung) und kann ebenfalls ohne Einschränkung der Allgemeinheit mit $p_{\text{ext}} = 0$ angenommen werden.

Wie im klassischen Fall einer Kanalströmung kann nun die Bernoulligleichung für eine Stromlinie zum Radius r in der Formulierung der spezifischen Energie p_0/ρ mit dem Gesamtdruck p_0 gegeben werden:

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_0^2 (R^2 - r^2) + \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 \quad (6.21)$$

bzw. in Abhängigkeit der Querschnittsfläche:

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2\pi}\omega_0^2 [A(R) - A(r)] + \frac{1}{2\pi}\omega_0^2 A(r) . \quad (6.22)$$

Hierbei bezeichnet jeweils der erste Summand $v^2/2$ die spezifische kinetische Energie zur Strömungsgeschwindigkeit v , der zweite Summand $\omega_0^2 (R^2 - r^2)/2$ bzw. $\omega_0^2 [A(R) - A(r)]/(2\pi)$ die spezifische Druckenergie und der dritte Summand $\omega_0^2 r^2/2$ bzw. $\omega_0^2 A(r)/(2\pi)$ die Lageenergie im harmonischen Confinement. Durch Zusammenfassen des zweiten und dritten Summanden vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2\pi}\omega_0^2 A(R) \quad (6.23)$$

bzw. durch Multiplikation mit $2\pi/\omega_0^2$ zu einer spezifischen Energie E im Sinne einer Fläche (als Analogon zur Energiehöhe im klassischen Fall der offenen Kanalströmung):

$$E = \frac{2\pi p_0}{\rho\omega_0^2} = \frac{\pi v^2}{\omega_0^2} + A(R) . \quad (6.24)$$

Diese Energie hängt ausschließlich von der Strömungsgeschwindigkeit und dem Strömungsquerschnitt $A(R)$ (und damit der Lage der freien Oberfläche) ab. Im Folgenden wird daher die Strömungsquerschnittsfläche $A(R)$ stets mit A bezeichnet.

Auch in diesem Falle vereinfacht sich die Gleichung unter Verwendung des konstanten Volumenstroms $Q = \pi R^2 v = Av$ und führt zu einer spezifischen Energiekurve in der Formulierung als Flächengleichung:

$$E = \frac{\pi Q^2}{\omega_0^2 A^2} + A . \quad (6.25)$$

Diese Kurve besitzt ein Minimum bei der kritischen Querschnittsfläche

$$A_c = \sqrt[3]{\frac{2\pi Q^2}{\omega_0^2}} \quad (6.26)$$

bzw. dem kritischen Oberflächenradius

$$R_c = \sqrt{\frac{A_c}{\pi}} = \sqrt[6]{2} \sqrt[3]{\frac{Q}{\pi \omega_0}} \quad (6.27)$$

und dem Energieminimum

$$E_{\min} = \frac{3}{2} A_c . \quad (6.28)$$

In Abhängigkeit dieser Größen kann mittels der Kontinuitätsbedingung auch die kritische Geschwindigkeit angegeben werden:

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{Q}{A_c} \\ &= \sqrt[3]{\frac{Q \omega_0^2}{2\pi}} \\ &= \frac{\omega_0 R_c}{\sqrt{2}} . \end{aligned} \quad (6.29)$$

Durch Normierung der Flächengleichung mittels A_c wird auch im Falle dieser Strömung eine dimensionslose spezifische Energiegleichung erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{E}{A_c} &= \frac{\pi v^2}{\omega_0^2 A_c} + \frac{A}{A_c} \\ &= \frac{A}{A_c} \left(\frac{1}{2} \frac{2\pi v^2}{\omega_0^2 A} + 1 \right) . \end{aligned} \quad (6.30)$$

Wir definieren nun die FROUDE-Zahl Fr für den vorliegenden Fall durch

$$Fr = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \frac{v}{\omega_0} = \sqrt{2} \frac{v}{\omega_0 R} . \quad (6.31)$$

Offensichtlich nimmt auch diese Zahl bei dem kritischen Wert für Querschnittsfläche (bzw. Radius) und Geschwindigkeit den Wert eins an. Mit Hilfe dieser FROUDE-Zahl ergibt sich eine analoge Formulierung zur Höhengleichung der Kanalströmung mit offener Oberfläche [vgl. Gleichung (6.10)]:

$$\frac{E}{A_c} = \frac{A}{A_c} \left[\frac{1}{2} Fr^2 + 1 \right] . \quad (6.32)$$

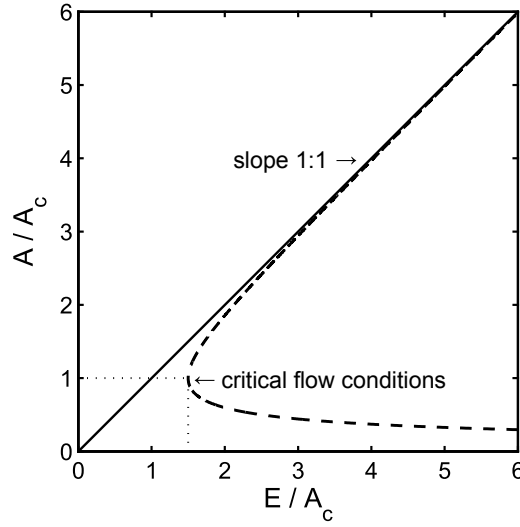


Abbildung 6.7: Spezifische Energiekurve eines Hydraulic Jumps in Zylindergeometrie mit paraboloidem Confinement und freier Oberfläche bei Radius R . Das Energieminimum findet sich bei $A/A_c = 1$ mit einem Wert von $(E/A_c) = 1,5$. Für Strömungsquerschnitte (und damit Oberflächenradien), die größer als die kritische Fläche (der kritische Radius) sind, wird die Strömung subkritisch, für kleinere Werte superkritisch.

In Abb. 6.7 ist die spezifische Energiekurve dargestellt. Durch die Auftragung der Querschnittsflächen statt der Radien entspricht die Kurve dem vorangegangenen Bild für die Kanalströmung und die Verwandtschaft der Phänomene wird deutlich. In beiden Fällen gibt es zu jeder Energie zwei Strömungsmodi: eine langsame Strömung mit großem Strömungsquerschnitt und eine schnelle Strömung mit geringem Querschnitt.

Ein Hydraulic Jump tritt auf, wenn die Geschwindigkeit von superkritisch zu subkritisch wechselt, und ist mit einer Vergrößerung des Strömungsquerschnitts verbunden, das heißt in diesem Falle mit einem Anwachsen des Oberflächenradius. Zur Charakterisierung des Übergangs wird erneut die Impulsbilanz aufgestellt. Eine Kontrollfläche liegt hierbei stromaufwärts vom Hydraulic Jump im superkritischen Bereich der Strömung und die andere Kontrollfläche stromabwärts im subkritischen Bereich. Diese Flächen begrenzen das Kontrollvolumen, in dem Energie dissipiert wird. Auch in der Zylindergeometrie führt der hydrostatische Druck zu einer Kraft auf die Grenzflächen, die sich für einen Strömungsradius R mit Hilfe von Gl. (6.18) berechnet zu

$$F_P = \frac{1}{4} \rho \omega_0^2 \pi R^4 = \frac{1}{4\pi} \rho \omega_0^2 A^2 . \quad (6.33)$$

Im Bereich der homogenen Strömung sind diese Kräfte auf die Kontrollflächen beidseitig im Gleichgewicht, jedoch gilt auch hier offensichtlich, dass für die zwei verschiedenen Querschnittsflächen unterschiedliche Kräfte wirken ($F_{P,1} < F_{P,2}$). Diese Differenz stammt aus der Impulsänderung während des Hydraulic Jumps. In den laminar und unverschert mit Geschwindigkeit v strömenden Bereichen gilt unverändert

$$\begin{aligned} F_{\text{Imp}} &= \dot{p} \\ &= \dot{m}v + m\dot{v} \\ &= \rho Qv + 0 . \end{aligned} \quad (6.34)$$

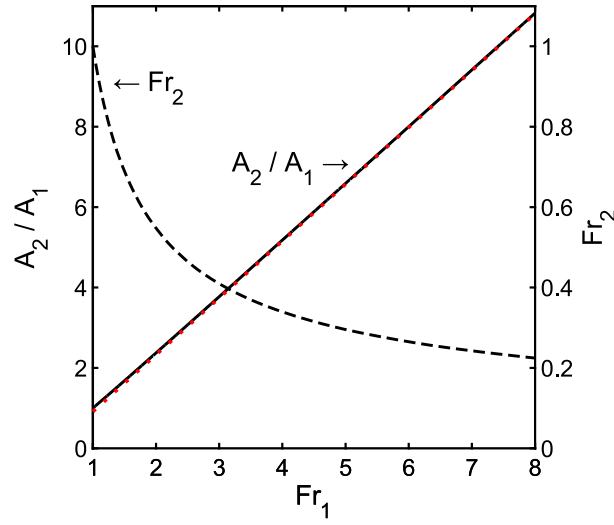


Abbildung 6.8: Der durchgezogene Graph zeigt die Zunahme des Strömungsquerschnitts im Hydraulic Jump in Abhängigkeit der superkritischen FROUDE-Zahl. Diese Kurve nähert sich asymptotisch der rot gepunktet eingezeichneten Geraden $\sqrt{2}Fr_1 - 1/2$ und überdeckt diese nahezu vollständig. Der gestrichelte Graph zeigt die zugehörige FROUDE-Zahl Fr_2 , die sich hinter dem Hydraulic Jump im subkritischen Bereich einstellt.

Somit ergibt sich die Gesamtbilanz:

$$\rho Q(v_1 - v_2) = \frac{1}{4\pi} \rho \omega_0^2 (A_2^2 - A_1^2) . \quad (6.35)$$

Mit Hilfe der FROUDE-Zahl für den superkritischen Bereich $Fr_1 = (\sqrt{2\pi} v_1)/(\sqrt{A_1} \omega_0)$ lässt sich diese Gleichung auf eine dimensionslose Form bringen:

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + \frac{A_2}{A_1} - 2Fr_1^2 = 0 . \quad (6.36)$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich: Der Querschnittszuwachs im Hydraulic Jump ist – analog zur Kanalströmung [vgl. Gl. (6.17)] – vollkommen durch die FROUDE-Zahl im superkritischen Bereich charakterisiert. Die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) . \quad (6.37)$$

Über die Kontinuitätsbedingung $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ kann auch direkt die FROUDE-Zahl für den subkritischen Bereich in Abhängigkeit von Fr_1 angegeben werden: $Fr_2 = (A_1/A_2)^{3/2} Fr_1$.

Der Zuwachs des Strömungsquerschnitts in Abhängigkeit der FROUDE-Zahl im superkritischen Bereich (Fr_1) sowie die resultierende Abnahme der FROUDE-Zahl für den subkritischen Bereich (Fr_2) sind in Abb. 6.8 dargestellt. Für große FROUDE-Zahlen Fr_1 – das bedeutet für schnelle Strömungen – nimmt die Querschnittsfläche nahezu linear mit der Funktion $A_2/A_1 \approx \sqrt{2}Fr_1 - 1/2$ zu.

6.2.1 Anmerkungen zur Analogie von offenen Kanalströmungen und zylindrischen Strömungen im paraboloiden Confinement

Die Betrachtung des Hydraulic Jumps im Zylinder mit paraboloidem Confinement zeigt große Ähnlichkeiten mit der offenen Kanalströmung. Insbesondere ist bemerkenswert, dass die erhaltenen Formeln durch die Verwendung der Bernoulligleichung als spezifische Energiegleichung in Flächenform den Gleichungen des Hydraulic Jumps in offenen Kanälen entsprechen. Wäre im ersteren Falle statt der Kanaltiefe d die Kanalquerschnittsfläche $A = bd$ mit der konstanten Breite b verwendet worden und statt der bekannten Bernoulligleichung in Höhenform eine äquivalente Formulierung in Flächenform, so würden sich die Gleichungen (bis auf die Definition einer Konstanten ζ) vollkommen entsprechen und hätten die Form:

$$E = \zeta v^2 + A \quad (6.38)$$

bzw. unter Verwendung des konstanten Volumenstroms $Q = Av$

$$E = \tilde{\zeta} \frac{1}{A^2} + A, \quad (6.39)$$

mit einer angepassten Konstanten $\tilde{\zeta}$.

Hintergrund hierfür ist, dass die Zusammenfassung von Druck und Lageenergie in Flächennotation in beiden Fällen auf die gleiche Form führt: Für den offenen Kanal der Füllhöhe H gilt in einer Höhe h über Grund für die spezifische Druckenergie e_p

$$e_p(h) = g(H - h) \quad (6.40)$$

und für die spezifische Lageenergie e_L

$$e_L(h) = gh. \quad (6.41)$$

Die Summe ergibt

$$e_{p+L}(h) = e_p(h) + e_L(h) = gH. \quad (6.42)$$

Die Erweiterung mit der Kanalbreite b liefert

$$e_{p+L}(A) = \frac{g}{b} A. \quad (6.43)$$

Im Falle der zylindrischen Strömung ergibt sich für diese beiden spezifischen Energien

$$e_p(r) = \frac{1}{2} \omega_0^2 (R^2 - r^2), \quad (6.44)$$

$$e_L(r) = \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 \quad (6.45)$$

und für die Summe

$$e_{p+L}(r) = \frac{1}{2} \omega_0^2 R^2 \quad (6.46)$$

$$e_{p+L}(A) = \frac{\omega_0^2}{2\pi} A. \quad (6.47)$$

In beiden Fällen gilt, dass die spezifische Energie linear mit der Querschnittsfläche steigt, was zu der Äquivalenz der mathematischen Formulierung des Hydraulic Jumps führt.

Im Fall der Kanalströmung ist es ein Charakteristikum der FROUDE-Zahl, dass sie das Verhältnis aus Strömungsgeschwindigkeit und Ausbreitungsgeschwindigkeit von (kleinen) Oberflächenwellen darstellt. Um zu überprüfen, ob dies auch im Falle der Strömung im paraboloiden Confinement entlang des Zylinders gilt, wird im folgenden Abschnitt eine Oberflächenwelle auf einem Zylindermantel charakterisiert.

6.2.2 Oberflächenwellen auf Zylindermänteln

Auf der freien Oberfläche eines Zylinders im paraboloiden Confinement können radialsymmetrische Wellen propagieren. Tatsächlich gibt es auch weitere mögliche Schwingungsmoden, die jedoch für die betrachtete Fragestellung weniger von Interesse sind. Die Frage, der in diesem Abschnitt nachgegangen werden soll, ist, ob die für die zylindrische Strömung definierte FROUDE-Zahl

$$Fr = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \frac{v}{\omega_0} = \sqrt{2} \frac{v}{\omega_0 R} \quad (6.48)$$

in Analogie zum Hydraulic Jump der offenen Kanalströmung dem Quotienten aus Strömungsgeschwindigkeit v und Propagationsgeschwindigkeit c einer (kleinen) Oberflächenwelle entspricht. In diesem Falle würde gelten: $c = \omega_0 R / \sqrt{2}$.

Erneut beginnt die Betrachtung mit dem hydrostatischen Druck mit Druckgradient

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \omega_0^2 r. \quad (6.49)$$

Eine Vergrößerung des Zylinderradius von R auf $R+dh$ mit einer kleinen Änderung dh führt hiermit zu einer Zunahme des hydrostatischen Drucks um $dp = \rho \omega_0^2 R dh$. Da es sich um eine Oberflächenwelle handeln soll, gilt für die kleine Auslenkung, dass sie ortsabhängig entlang der Zylinderhauptachse z ist und zeitabhängig, also $dh = dh(z, t)$. Entlang der Hauptachse des Zylinders ergibt sich dann die Druckentwicklung (also die Variation des Drucks) als Funktion dieser kleinen, ortsabhängigen Auslenkung zu

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \omega_0^2 R \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (6.50)$$

Im Folgenden wird weiterhin von einer reibungsfreien, inkompressiblen Strömung ausgegangen, die ausschließlich eine Strömungskomponente in Richtung der Hauptachse des Zylinders mit der Geschwindigkeit $v_z = v$ besitzt. Für die anderen Geschwindigkeitskomponenten gilt: $v_r = v_\varphi = 0$. Die EULER-Gleichungen in Zylinderkoordinaten (vgl. Abschn. 2.3.2) liefern nun sofort $\partial p / \partial r = 0$ und $\partial p / \partial \varphi = 0$. Die Gleichung für die z -Komponente liefert

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ &= -\omega_0^2 R \frac{\partial h}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Wird zu dieser Gleichung die Kontinuitätsbedingung hinzugenommen, so erhält man ein vollständiges System von Differentialgleichungen. Im Bereich der Hydrodynamik wird dieses Gleichungssystem zur Berechnung von Durchfluss und Pegelstand eindimensionaler Strömungen verwendet und als SAINT-VENANT-Gleichungen bezeichnet (vgl. [288], Kap. 16).

Die Kontinuitätsbedingung der SAINT-VENANT-Gleichungen lautet:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (Av)}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial A}{\partial z} = 0 . \quad (6.52)$$

Für den Strömungsquerschnitt gilt: $A = \pi (R + h)^2 = \pi R^2 + 2\pi Rh + \pi h^2$, mit einer kleinen Störung h des Radius R ($h \ll R$). Für die Strömungsgeschwindigkeit wird angenommen, dass gilt: $v = v_0 + \tilde{v}$ mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v_0 und einer Störung erster Ordnung \tilde{v} ($\tilde{v} \ll v_0$). In die Kontinuitätsbedingung eingesetzt, ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\pi R^2 + 2\pi Rh + \pi h^2) + A \frac{\partial (v_0 + \tilde{v})}{\partial z} + (v_0 + \tilde{v}) \frac{\partial}{\partial z} (\pi R^2 + 2\pi Rh + \pi h^2) = 0 . \quad (6.53)$$

Die linearisierte Form der SAINT-VENANT-Gleichung lautet dann:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{R}{2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + v_0 \frac{\partial h}{\partial z} = 0 . \quad (6.54)$$

Analog liefert die Linearisierung der EULER-Gleichung:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\omega_0^2 R \frac{\partial h}{\partial z} . \quad (6.55)$$

Die kleinen Störungen werden als wellenartig angenommen:

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \hat{v} \exp [i (kz - \omega t)] , \\ h &= \hat{h} \exp [i (kz - \omega t)] . \end{aligned}$$

Die im Folgenden benötigten partiellen Ableitungen lauten somit:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -i\omega \tilde{v} , \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -i\omega h , \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = ik \tilde{v} , \quad \frac{\partial h}{\partial z} = ik h .$$

Hiermit lautet die fourierform EULER-Gleichung (6.55):

$$\begin{aligned} -i\omega \tilde{v} + v_0 ik \tilde{v} &= -\omega_0^2 R ik h \\ \Longleftrightarrow \quad \omega - kv_0 &= \omega_0^2 R k \frac{h}{\tilde{v}} . \end{aligned} \quad (6.56)$$

Die Kontinuitätsgleichung berechnet sich mit diesem Störungsansatz zu

$$\begin{aligned} -i\omega h + \frac{R}{2} ik \tilde{v} + v_0 ik h &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \omega - kv_0 &= \frac{R}{2h} k \tilde{v} . \end{aligned} \quad (6.57)$$

Diese beiden Terme [EULER-Gleichung (6.56) und Kontinuitätsgleichung (6.57)] liefern gemeinsam die Dispersionsrelation

$$\begin{aligned}
 (\omega - kv_0)^2 &= \frac{1}{2}\omega_0^2 R^2 k^2 \\
 \Leftrightarrow \quad \omega - kv_0 &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 Rk \\
 \Leftrightarrow \quad \omega &= k \left(v_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 R \right) .
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Diese Dispersionsrelation beschreibt nun die radiale Mode, die durch ringförmiges Zusammenziehen und Ausdehnen des Zylinders charakterisiert ist. Diese Mode besitzt eine akustische Dispersion, das bedeutet, dass Phasen- und Gruppengeschwindigkeit übereinstimmen und unabhängig von der Wellenzahl sind.

Es lässt sich identifizieren:

$$\omega = k(v_0 \pm c) \tag{6.59}$$

und somit

$$c = \frac{\omega_0 R}{\sqrt{2}} . \tag{6.60}$$

Hierbei ist c die Propagationgeschwindigkeit in Bezug auf das mit v_0 strömende Medium.

Ein stationärer Sprung ergibt sich nun, wenn die gegen die Strömung propagierende Welle genauso schnell ist wie die Strömung selbst, also wenn gilt:

$$\begin{aligned}
 v_0 - c &= 0 \\
 \Leftrightarrow \quad \frac{v_0}{c} &= 1 \\
 \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}v_0}{\omega_0 R} &= 1 .
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

Die letztere Gleichung entspricht genau der kritischen Bedingung der Strömung ($Fr = 1$). Insgesamt zeigt sich also, dass – in Analogie zum Hydraulic Jump in Kanälen mit freier Oberfläche – auch im Fall des Zylinders mit paraboloidem Confinement die definierte FROUDE-Zahl den Quotienten aus Strömungsgeschwindigkeit und Ausbreitungsgeschwindigkeit von (kleinen) Oberflächenwellen darstellt:

$$Fr = \frac{v_0}{c} . \tag{6.62}$$

6.3 Hydraulic Jumps in LD-Simulationen toroidaler Staubströmungen

Um zu überprüfen, ob das Modell des Hydraulic Jumps in der vereinfachten Form – das heißt unter Vernachlässigung der Strömungsgeometrie und der Inhomogenität der Strömung – auf den Torus anwendbar ist, wurden Simulationen mittels des etablierten LD-Codes durchgeführt. Die Wahl der Berechnungsparameter erfolgte entsprechend der Kriterien, die in Abschn. 4.3 in Bezug auf die Simulationen beschrieben wurden. Die gewählten Parameter empfinden die experimentelle Situation bei hoher Reibungsdämpfung nach und sind in Tab. 6.1 aufgeführt.

Tabelle 6.1: Simulationsparameter zur Überprüfung des vorgestellten Modells

Parameter	Variable	Wert
Partikelzahl	N	4096
Partikelladung	q_d	$-2512 e$
Abschirmlänge	λ	$180 \mu\text{m}$
Neutrgastemperatur	T	300 K
EPSTEIN-Koeffizient	β	100 s^{-1}
Großer Torusradius	R_0	5,3 mm
Axiale Fallenfrequenz	$\omega_z = \omega_0$	300 s^{-1}
Radiale Fallenfrequenz	$\omega_\rho = \omega_0$	300 s^{-1}
Antriebskraft	F_i	$0,4 g \dots 1,2 g$

Die hier verwendeten Datensätze resultieren aus Simulationen, die nach einer ausreichenden Relaxationszeit für 200 000 Zeitschritte das stationäre Strömungsfeld berechnet haben. Um Korrelationseffekte in der Auswertung zu vermeiden, wurde jeweils lediglich jeder 50. Zeitschritt in die Auswertung eingebunden. Entsprechend der dynamischen Anpassung des Zeitschrittes der Simulation (vgl. Abschn. 4.3.1) ist so im Schnitt ein Partikelversatz von etwa 2,5 WIGNER-SEITZ-Radien zu erwarten. In Abb. 6.9 sind in der linken Spalte die Histogramme, die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Staubpartikel beschreiben, sowie in der rechten Spalte die mittleren kinetischen Temperaturen [entsprechend Gleichung (2.26)] für vier verschiedene Stärken des Ionenwindes ($F_i = 0,4 g$, $F_i = 0,6 g$, $F_i = 0,8 g$ und $F_i = 1,2 g$) dargestellt. Die Darstellung erfolgt, wie bereits bei der Beschreibung der experimentellen Verhältnisse, in Polarkoordinaten. Die Auswertungen erfolgen zunächst auf einem Gitter von $\Delta\varphi \cdot R_0 = \Delta\rho = \Delta z = 20 \mu\text{m}$. Die präsentierten Visualisierungen beziehen sich jedoch auf die zentrale Ebene des Torus einer Dicke von $\Delta z = 240 \mu\text{m}$. Hierfür wurde eine Mittelung über den zentralen Torusschnitt entlang der z -Achse durchgeführt. Abgeleitete Größen wurden nur in die Auswertung aufgenommen, wenn eine Mindestzahl von fünf Ereignissen in einem Bin vorlag.

In den Histogrammen ist klar die Anordnung der Partikel in konzentrischen Schalen zu beobachten, die in allen Fällen entlang der Strömung variiert. Die radiale Ausdehnung der Strömungen besitzt in allen gezeigten Fällen ihr Maximum im Bereich um 7:00 h. Von dort aus verjüngt sich die Querschnittsfläche im weiteren Verlauf. Diese Phase umfasst ungefähr drei Viertel des Strömungsverlaufs und endet in einer schlagartigen Aufweitung des Querschnitts. Die Stelle, an der dieses schockartige Anwachsen des Strömungsquerschnitts auftritt, verschiebt sich von 3:30 h in Abb. 6.9 (a) mit steigendem Antrieb nach 5:30 h in Abb. 6.9 (d). Im Strömungsbereich unmittelbar vor dem Aufweiten des Querschnitts geht mit der minimalen radialen Ausdehnung die minimale Anzahl an Schalen einher. Diese variiert mit dem Antrieb und beträgt (a) $N_{S,\min} = 1$ für $F_i = 0,4 g$, (b) $N_{S,\min} = 2$ für $F_i = 0,6 g$, (c) $N_{S,\min} = 2$ für $F_i = 0,8 g$ und (d) $N_{S,\min} = 3$ für $F_i = 1,2 g$. Eine weitere Beobachtung ist, dass in allen gezeigten Fällen der Abstand zwischen den inneren Schalen in Bereichen großer Querschnittsfläche relativ gleich ist. Dies kann als erster Hinweis dafür gedeutet werden, dass die Annahme der Inkompressibilität gerechtfertigt ist. Lediglich die äußere Schale weist einen etwas größeren Abstand auf. Wie bereits bei den experimentellen Ergebnissen gezeigt, ist auch im Falle der hier vorgestellten Simulationen die Strömung nicht vollkommen symmetrisch. Insbesondere in Bereichen hoher Geschwindigkeit wird sie durch Zentrifugaleffekte nach außen getragen.

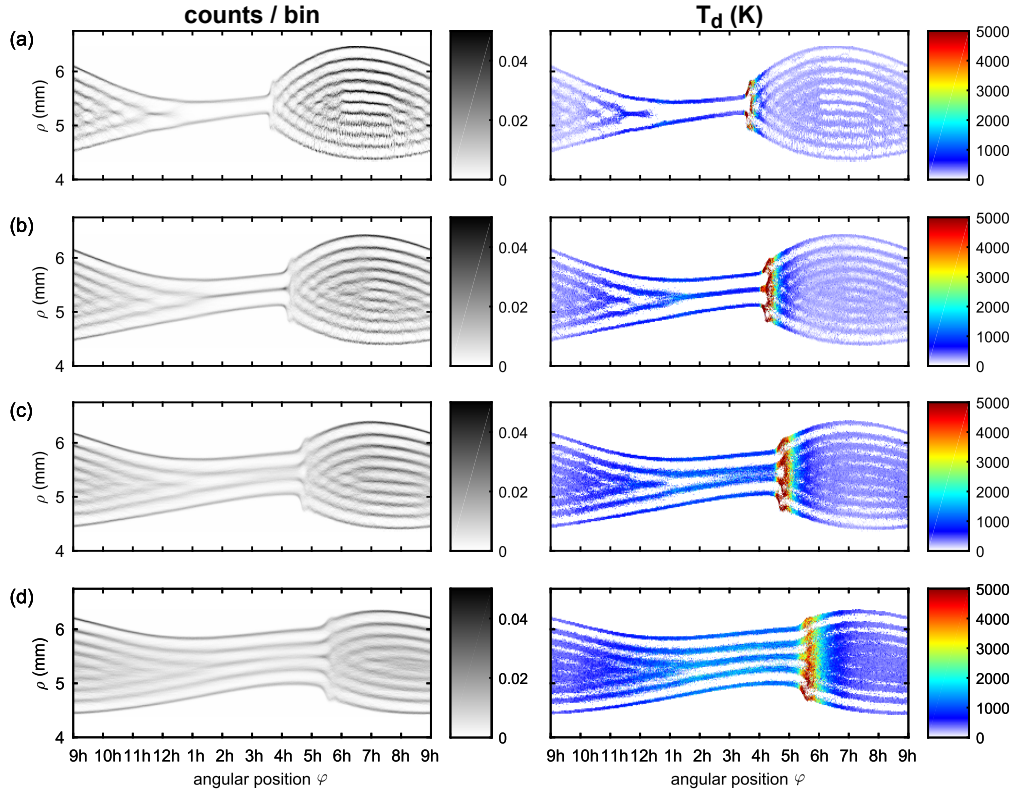


Abbildung 6.9: Strömungs- und Temperaturprofile des zentralen Schnittes durch simulierte Staubtorus in Polardarstellung. Bei ansonsten gleichbleibenden Parametern (vgl. Tab. 6.1) wurde der antreibende Ionenwind variiert: (a) $F_i = 0,4 g$, (b) $F_i = 0,6 g$, (c) $F_i = 0,8 g$ und (d) $F_i = 1,2 g$. Die linke Spalte zeigt Histogramme, die der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte von Staubpartikeln entsprechen, in der rechten Spalte ist die kinetische Staubtemperatur entsprechend Gleichung (2.26) gezeigt. In allen Fällen koinzidieren eine schlagartige Aufweitung der Querschnittsfläche und eine plötzliche Aufheizung. Dies entspricht den Geschehnissen während eines Hydraulic Jumps.

Bei der Betrachtung der Temperaturfelder in den Abb. 6.9 (a)-(d) fällt auf, dass die schockartige Aufweitung des Querschnitts mit einer plötzlichen Erhöhung der kinetischen Temperatur einhergeht. Diese erreicht einen Maximalwert von einigen tausend Kelvin. Mit steigendem Antrieb vermindert sich der Maximalwert der Aufheizung etwas, jedoch wird der Bereich, in dem die starke Aufheizung auftritt, breiter.

Zusammengenommen ergeben die schlagartige Aufweitung des Strömungsquerschnitts sowie die plötzliche Aufheizung, die ein Indikator der Dissipation von Bewegungsenergie ist, ein stimmiges Bild mit dem Modell des Hydraulic Jumps.

Um zu überprüfen, ob das oben erarbeitete Modell die hier vorliegende Situation auch tatsächlich beschreiben kann, werden im Folgenden die hergeleiteten Gleichungen auf die Simulationsergebnisse angewandt. Hierfür wird zunächst die Situation aus Abb. 6.9 (b), der Torus bei $F_i = 0,6 g$, betrachtet. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.10 zusammengefasst. In Abb. (a) ist – analog zu Abb. 6.9 (b) links – die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für Staubpartikel in einer zentralen Ebene durch ein Histogramm visualisiert. Als rotes Overlay ist die mittlere Toroidalgeschwindigkeit eingezeichnet. Die Strömung wird im Folgenden in drei Bereiche eingeteilt, auf die zur Beschreibung referenziert werden wird:

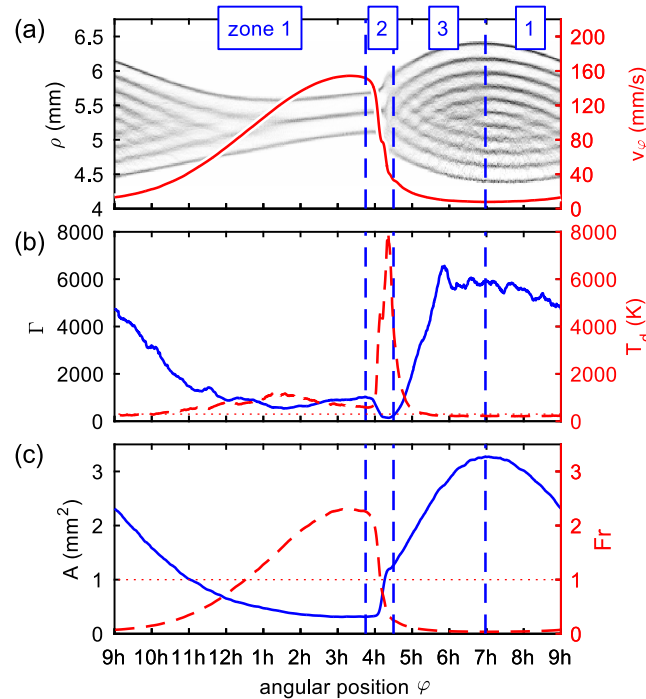


Abbildung 6.10: Zentrale Kenngrößen des Torus mit $F_i = 0,6g$. In Abb. (a) ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für Staubpartikel in einem zentralen Schnitt dargestellt. Als Overlay ist in Rot der Geschwindigkeitsverlauf dargestellt. Das mittlere Diagramm (b) beinhaltet in Blau (linke Skala) den Kopplungsparameter Γ , sowie in Rot gestrichelt (rechte Skala) die kinetische Staubtemperatur. Die dritte Abb. (c) beinhaltet in Blau (linke Skala) die Querschnittsfläche sowie in Rot gestrichelt (rechte Skala) die FROUDE-Zahl. Die Strömung ist in drei Zonen geteilt: Die Beschleunigungsphase (Zone 1), den Hydraulic Jump (Zone 2) und die Verzögerungsphase (Zone 3)

Zone 1: Beschleunigungsphase Im Bereich von etwa 7:00 h bis 3:45 h nimmt die Strömungsgeschwindigkeit kontinuierlich zu und Stromlinien vereinigen sich. Insgesamt verjüngt sich die Strömung von sechs auf zwei Schalen.

Zone 2: Hydraulic Jump Im Bereich von etwa 3:45 h bis 4:30 h nimmt die Strömungsgeschwindigkeit schlagartig ab und die Querschnittsfläche dramatisch zu. Im Zentrum der Strömung bildet sich eine zusätzliche Schale aus. Dieses schockartige Ereignis wird als Hydraulic Jump identifiziert.

Zone 3: Verzögerungsphase Im Bereich von etwa 4:30 h bis etwa 7:00 h nimmt die Strömungsgeschwindigkeit langsam kontinuierlich ab, während sich die Schalen aufspalten, bis schließlich wieder elf ausgeprägte Stromlinien zu erkennen sind.

Abbildung 6.10 (b) zeigt in Blau den Kopplungsparameter Γ entlang des Strömungszentrums. Diese Werte wurden mit der Näherung des WIGNER-SEITZ-Radius nach OTT *et al.* erhalten [294]. Die höchsten Werte von $\Gamma \approx 6000$ besitzt der Kopplungsparameter zwischen 6:00 h und 9:00 h. Von 9:00 h bis 1:00 h fällt der Parameter und bleibt im anschließenden, ruhig strömenden Bereich der Strömung auf einem niedrigen Niveau im Bereich $\Gamma = 600 \dots 1000$. In Zone 2, dem Hydraulic Jump, nimmt Γ schlagartig ab und fällt im Bereich der plötzlichen Zunahme des Strömungsquerschnitts auf seinen Minimalwert von $\Gamma \approx 150$.

In der anschließenden Zone 3 nimmt die Kopplung wieder gleichmäßig zu und hat nach circa 1:30 h wieder den Maximalwert erreicht.

Neben dem Kopplungsparameter ist in Abb. 6.10 (b) die kinetische Staubtemperatur als roter, gestrichelter Graph dargestellt. Im Bereich der sehr starken Kopplung ist der Staub ungefähr im Temperaturgleichgewicht mit dem Hintergrundgas. Im Bereich von 11:00 h bis 4:00 h, in dem die Strömungsgeschwindigkeit deutlich zunimmt, ist eine erhöhte Temperatur von $T_d = (900 \pm 300) \text{ K}$ zu finden. Parallel zum Einbruch des Kopplungsparameters tritt während des Hydraulic Jumps ein plötzlicher Anstieg der kinetischen Temperatur bis zu $T_d \approx 8000 \text{ K}$ auf. Im Anschluss kühlt die Strömung wieder innerhalb des Winkels von einer Stunde auf Raumtemperatur aus.

In dem dritten Diagramm der Abbildung sind die Strömungsquerschnittsfläche und die FROUDE-Zahl aufgetragen. Die Querschnittsfläche nimmt in Zone 1 kontinuierlich ab, während die Strömungsgeschwindigkeit zunimmt. Im Hydraulic Jump, bei circa 4:00 h, kommt es zu einer schlagartigen Aufweitung um mehr als einen Faktor zwei innerhalb eines sehr kleinen Winkelbereichs. Dieser plötzliche Anstieg geht in Zone drei in einen moderaten Anstieg über, der schließlich bei ca. 7:00 h sein Maximum erreicht¹. Die FROUDE-Zahl stellt im Wesentlichen den Quotienten aus Strömungsgeschwindigkeit v und der Wurzel der Querschnittsfläche \sqrt{A} dar und ist als rote gestrichelte Linie eingezeichnet. Das Zusammenwirken der Geschwindigkeitsabnahme während des Hydraulic Jumps und der schlagartigen Zunahme des Strömungsquerschnitts sorgt dafür, dass die FROUDE-Zahl in diesem Bereich einen noch dramatischeren Wechsel erfährt als die beiden einzelnen Größen: Ihr Wert verkleinert sich von circa $Fr = 2,3$ um einen Faktor 10. Während dieser Abnahme durchschreitet die FROUDE-Zahl die kritische Bedingung für einen Hydraulic Jump $Fr = 1$. Dieser Punkt trifft mit der Aufspaltung der inneren Stromlinie, der drastischen Vergrößerung der Querschnittsfläche, der schlagartigen Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit und der enormen Aufheizung (und der damit verbundenen Abnahme der Kopplung) zusammen.

Bemerkenswert ist darüber hinaus, dass der Großteil all dieser Veränderungen auf einer Längenskala von nur $\Delta\varphi \cdot R_0 \approx (1/3) \text{ h} \cdot 5,3 \text{ mm} \approx 0,9 \text{ mm}$ geschieht. Dies entspricht lediglich etwa fünf Abschirmlängen, die wiederum in der Größenordnung des Interpartikelabstandes liegen². In diesem Sinne ist der Hydraulic Jump ein ausgesprochen lokalisierbares Phänomen, zu dem verhältnismäßig wenige Partikel zeitgleich beitragen.

Um die hergeleiteten Modellgleichungen des Hydraulic Jumps in Gänze zu überprüfen, wird nun noch die Impulsbilanz betrachtet. Da die Abnahme der Geschwindigkeit sowie die schlagartige Aufweitung des Strömungsquerschnitts in Zone 2 geschehen, werden die Grenzflächen dieser Zone als Begrenzungen des Kontrollvolumens gewählt. In diesem Falle führt die FROUDE-Zahl bei Eintritt in diese Zone von $Fr_1 \approx 2,3$ entsprechend Gl. (6.37)

¹ Als Strömungsquerschnittsfläche wurde hier die konvexe Hülle eines POINCARÉ-Schnitts gewählt. Die Frage nach der „richtigen“ Querschnittsfläche wird in Abschn. 8.2 diskutiert. Aus Sicht der Auswertung besitzt die hier angewandte Methode den Vorteil der Eindeutigkeit. Aus physikalischer Sicht wird hiermit diejenige Position als Oberfläche verstanden, an der die tatsächliche Kraftwirkung des Confinements auf die Partikel der Oberfläche stattfindet.

² Das Verhältnis aus dem Abstand zum nächsten Nachbarn d_{nn} und der Abschirmlänge λ wird im Bereich der staubigen Plasmen als „screening strength“ κ bezeichnet ($\kappa = d_{nn}/\lambda$). In den in dieser Arbeit präsentierten Datensätzen gilt $1 < \kappa < 1,5$ [vgl. Abb 7.4 (a)].

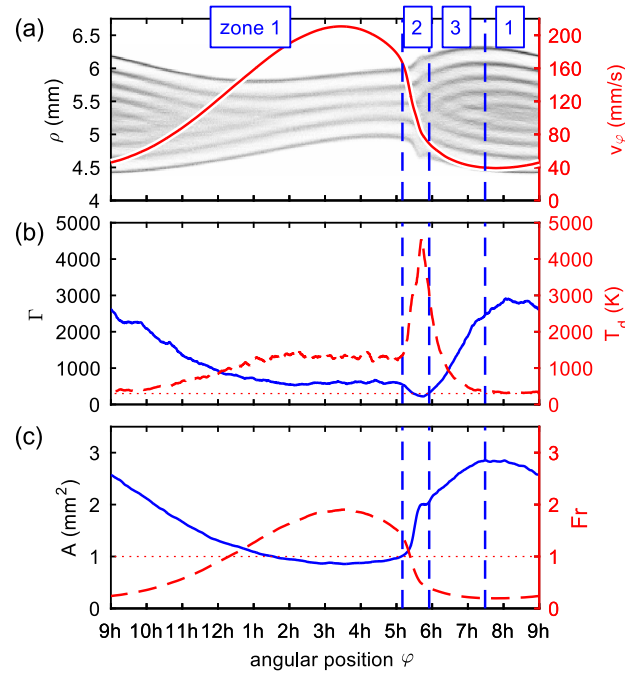


Abbildung 6.11: Zentrale Kenngrößen des Torus mit $F_i = 1,2 g$, Darstellung analog zu Abb. 6.10. In Abb. (a) ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für Staubpartikel in einem zentralen Schnitt sowie der Geschwindigkeitsverlauf als roter Overlay dargestellt. Das mittlere Diagramm (b) beinhaltet in Blau (linke Skala) den Kopplungsparameter Γ sowie in Rot gestrichelt (rechte Skala) die kinetische Staubtemperatur. Die dritte Abb. (c) beinhaltet in Blau (linke Skala) die Querschnittsfläche sowie in Rot gestrichelt (rechte Skala) die FROUDE-Zahl. Die Strömung ist in drei Zonen geteilt: die Beschleunigungsphase (Zone1), den Hydraulic Jump (Zone2) und die Verzögerungsphase (Zone3).

auf ein Querschnittsflächenverhältnis von $A_2/A_1 \approx 2,8$. Unter Berücksichtigung der Vielzahl an Näherungen im Modell steht dieser Wert in guter Übereinstimmung mit dem Wert $A_2/A_1 = 1,18 \text{ mm}^2/0,35 \text{ mm}^2 \approx 3,4$ aus der Simulation. Bezogen auf den Oberflächenradius liegt die Abweichung zwischen den zwei Werten bei unter 10%.

Ein weiteres Beispiel für einen Hydraulic Jump ist in Abb. 6.11 dargestellt. In diesem Falle sind die entsprechenden Werte für den Torus bei einem Antrieb von $F_i = 1,2 g$ abgebildet [entspricht dem Torus aus Abb. 6.9 (d)]. Der erhöhte Antrieb führt direkt zu erhöhten Toroidalgeschwindigkeiten der Strömung. Darüber hinaus liegen auch die Temperaturen im Bereich des Plateaus von 12:00 h bis 5:00 h höher als zuvor. Im Vergleich zu dem zuvor betrachteten Torus ist Zone2 in diesem Fall verschoben und liegt jetzt zwischen 5:00 h und 6:00 h. Auch die Maximaltemperatur in diesem Bereich erreicht nicht den Wert des vorangegangenen Beispiels. Dennoch koinzidieren auch hier der Eintritt der Bifurkationen, die Aufweitung des Querschnittes, die rapide Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit, die drastische Aufheizung, die Abnahme der Kopplung und das Durchschreiten der kritischen Bedingung durch die FROUDE-Zahl. Entsprechend dieser Betrachtung wird also auch diese Strömung durch die hydrodynamische Beschreibung erfasst.

6.4 Bewertung der Anwendbarkeit der Modellvorstellung auf die Torusströmung

Die präsentierten Staubströmungen fügen sich gut in das Bild bekannter Simulationsergebnisse ein. Die starke, durch das Confinement induzierte Kopplung des Vielteilchensystems lässt die Partikel bereits bei Antrieben, die geringer als die Gravitationskraft sind, eine vollständige Rotation ausführen. Die effektive Kühlung durch das Neutralgas sorgt dafür, dass die Strömung in konzentrische Schalen relaxiert und sehr hohe Werte des Kopplungsparameters vorzufinden sind. Diese starke Kopplung ist eine Ursache dafür, dass dem System die Eigenschaft der Inkompressibilität zugeschrieben werden kann.

Insgesamt weisen die simulierten Staubströmungen große Ähnlichkeiten zu Strömungen in offenen Kanälen auf: Eine rapide Verlangsamung der Strömung, die mit einer schlagartigen Zunahme der Querschnittsfläche einhergeht, kann in beiden Fällen auftreten. Die Analyse einer inkompressiblen Flüssigkeitsströmung in einem Zylinder mit freier Oberfläche in paraboloidem Confinement liefert die kritische Bedingung für dieses System und ermöglicht die Definition einer passenden FROUDE-Zahl. Bei der Durchschreitung der kritischen Bedingung von superkritisch zu subkritisch kann ein Hydraulic Jump auftreten. Durch das Aufstellen der Impulsbilanz kann die Strömung stromabwärts des Hydraulic Jumps allein durch die FROUDE-Zahl vor dem Ereignis charakterisiert werden.

Die kritische Bedingung kann durch die Betrachtung von langwelligen Oberflächenwellen auf der freien Oberfläche im biharmonischen Confinement verstanden werden. Die Dispersionsrelation der radialsymmetrischen Mode dieser Störung ist streng akustisch. Die für diese Störung ermittelte Gruppengeschwindigkeit definiert exakt die kritische Geschwindigkeit des Hydraulic Jumps. Im Bereich der superkritischen Strömung werden sämtliche Störungen mit der Strömung stromabwärts getragen. Verlangsamt sich die Strömung und erreicht die kritische Geschwindigkeit, so werden die entgegenlaufenden Wellen im Laborsystem stationär und bilden eine stehende Oberflächenwelle aus. Dies führt zu der lokalisierten Aufweitung des Strömungsquerschnittes und den damit verbundenen Bifurkationen im Strömungszentrum.

Die Auswertung der LD-Simulationen zeigt, dass die Aufweitung der Strömung und die schlagartige Aufheizung an dem Punkt der Verzögerung auftreten, an dem die FROUDE-Zahl die kritische Bedingung $Fr = 1$ mit einer fallenden Flanke durchschreitet. Die kinetische Staubtemperatur kann an dieser Stelle einige tausend Kelvin erreichen und die Kopplung der Staubpartikel fällt auf ihr Minimum. Genau wie im Falle der Kanalströmungen mit freien Oberflächen läuft der inverse Übergang der FROUDE-Zahl (subkritisch zu superkritisch) eher glatt ab, ohne starke Variationen in den analysierten Kenngrößen der Strömung. Eine wichtige Erkenntnis aus den Simulationen ist, dass der Hydraulic Jump auf einer Längenskala von nur wenigen Interpartikelabständen abläuft und nur wenige Partikel zur selben Zeit in den Prozess des Jumps verwickelt sind.

Das angewendete Modell beinhaltet eine Vielzahl von Vereinfachungen, um die grundlegenden Mechanismen des Hydraulic Jumps in den Fokus zu rücken. Hierdurch ist nicht zu erwarten, dass die Modellvorstellung die Simulationen und die Realität des Laborexperimentes vollkommen identisch abzubilden vermag. So vernachlässigt die Modellvorstellung unter anderem den inhomogenen Antrieb, Reibungseffekte und die Krümmung der vorliegenden Strömung. Darüber hinaus wurden die Oberflächenwellen lediglich für den

langwelligen Grenzfall berechnet. Auch die korrekte Bestimmung der Querschnittsfläche und anderer hydrodynamischer Größen wie der Dichte des granularen Mediums im Fluidbild bedürften für eine genauere Modellierung weiterer Diskussion. Dennoch kann die in dem Modell entwickelte FROUDE-Zahl das Auftreten des Hydraulic Jumps charakterisieren. Die Tatsache, dass die fallende Flanke der FROUDE-Zahl aufgrund der schlagartigen Abbremsung der Strömung und der plötzlichen Aufweitung des Strömungsquerschnittes sehr steil ist, erklärt, warum dieses Maß trotz der Näherungen und der Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der einfließenden Größen sehr gute Ergebnisse für die Bestimmung des Ortes des Hydraulic Jumps liefert.

Darüber hinaus sei an dieser Stelle angemerkt, dass bewusst die Formulierung gewählt wurde: „Die Staubströmung verhält sich inkompressibel.“ Wie aus dem Bereich der YUKAWA-Bälle bekannt, haben Staubcluster durchaus ein inhomogenes Dichteprofil [60, 125, 295]. Es geht also in diesem Falle um dynamische Inkompressibilität, eine Strömungseigenschaft, wie sie beispielsweise von den Oberflächenmoden nicht-neutraler Plasmen [296] oder YUKAWA-Bällen [297] bekannt ist, und nicht um eine Materialeigenschaft.

Den Fragen, woher dieses Verhalten der Strömung rührt und wie die Evolution der Mikrostruktur der Strömung vonstattengeht, wird im folgenden Kapitel nachgegangen.

7 | Mikrophysik toroidaler Staubströmungen

Die bisherigen Untersuchungen der toroidalen Staubströmung wurden zum Großteil aus einem hydrodynamischen Blickwinkel auf die Fragestellungen durchgeführt. Im folgenden Kapitel soll nun der Granularität der Strömung Rechnung getragen werden. Insbesondere sollen die Vorgänge beim Zusammenströmen und Aufspalten der Stromlinien beleuchtet werden. Im letzteren Falle sollen auch die Unterschiede des Aufspaltens bei Auftreten eines Hydraulic Jumps und bei einer vollständig subkritischen Strömung aufgezeigt werden. Hierbei werden besondere Schwerpunkte auf denjenigen Vorgängen liegen, die eine Verformung der Partikelnachbarschaften mit sich bringen sowie auf der Relativedynamik dieser Nachbarn. Zentrale Ergebnisse der in diesem Kapitel präsentierten Untersuchungen wurden 2017 in Ref. [122] veröffentlicht.

7.1 LD-Simulationen stark gekoppelter Staubströmungen

Die Untersuchungen in diesem Kapitel basieren in Gänze auf LD-Simulationen, die mit Hilfe des in Abschn. 4.3 präsentierten Simulationscodes durchgeführt wurden. Wie im vorangegangenen Kapitel wurden für die folgenden Betrachtungen die Simulationen, nachdem sie einen stationären Zustand erreicht hatten, weitere 200 000 Schritte ausgeführt, von denen jeder fünfzigste Schritt in die Auswertungen einbezogen wurde. Auf diesem Wege werden auch hier Korrelationseffekte in der Auswertung minimiert.

Im Gegensatz zum vorangegangenen Kapitel wurde im vorliegenden Fall zur Variation der Strömungsgeschwindigkeit nicht der Antrieb durch den Ionenwind, sondern die Reibung bei ansonsten festgehaltenen Parametern variiert. Diese Variation schließt an Untersuchungen von REICHSTEIN *et al.* [115–117] an. Entsprechend ihrer Untersuchungen zu verschiedenen Strömungsmodi (vgl. Abb. 7.1) sollte es über diese Variation möglich sein, bei geeignetem Antrieb drei verschiedene Strömungsmodi zu etablieren: bei kleinen EPSTEIN-Koeffizienten Tori mit einem turbulenten Bereich in der Verzögerungsphase, bei moderaten Dämpfungen Tori mit einem schockartigen Phänomen, das nun als Hydraulic Jump identifiziert wurde, und bei sehr starker Dämpfung Tori ohne Instabilitäten. Anhand der in der Grafik dargestellten Systematik in den Staubströmungen und den Erfahrungen aus zahlreichen Simulationsläufen wird im Folgenden für den Antrieb $F_i/F_g = 0,8$ gewählt und für den EPSTEIN-Koeffizienten $\beta = 50 \text{ s}^{-1}$ für eine Strömung mit Turbulenz, $\beta = 100 \text{ s}^{-1}$ für eine Strömung mit Hydraulic Jump und $\beta = 200 \text{ s}^{-1}$ für eine Strömung ohne Instabilitäten.

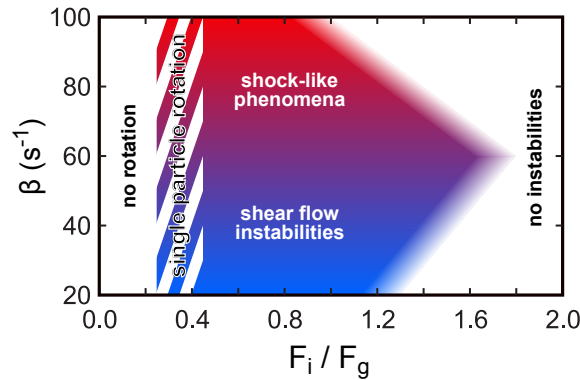


Abbildung 7.1: Kartierung verschiedener Strömungsmodi in Abhängigkeit von Antrieb und Reibung. Es bedarf eines Mindestantriebs, um den Staub in Rotation zu versetzen. Im rotierenden Torus kann dann der Strömungsmodus über die Reibung zwischen einer Strömung mit Turbulenz, einer Strömung mit einem schockartigen Phänomen und einer Strömung, die frei von Instabilitäten ist, variiert werden. (Grafik in Anlehnung an Ref. [117])

Die vollständige Auflistung der Simulationsparameter findet sich in Tab. 7.1 und orientiert sich an typischen Bedingungen im Laborexperiment. Im Gegensatz zu den Simulationen aus dem vorangegangenen Kapitel wurde hier die Partikelanzahl N auf 8192 erhöht, um durch einen vergrößerten Strömungsquerschnitt Oberflächeneffekte bei der Auswertung zu reduzieren.

Die in den folgenden Abschnitten präsentierten Methoden benötigen einseitig lediglich die Partikelpositionen und -geschwindigkeiten. Sie werten das vollständige dreidimensionale Strömungsfeld auf einem Gitter in Polarkoordinaten mit einer Auflösung von $\Delta\varphi R_0 = \Delta\rho = \Delta z = 20\ \mu\text{m}$ aus. Wie zuvor, werden bevorzugt Darstellungen der gemittelten Werte einer zentralen Torusebene (x - y -Ebene, $z = 0$) einer Dicke von $\Delta z = 240\ \mu\text{m}$ oder gemittelte Daten eines Schlauches von $a = 200\ \mu\text{m}$ Radius rund um das Strömungszentrum präsentiert. Auf diesem Wege werden bevorzugt die Effekte im Inneren der Strömung betrachtet und der Einfluss von Oberflächeneffekten wird minimiert.

Tabelle 7.1: Simulationsparameter zur Untersuchung der Mikrophysik inhomogener Staubströmungen

Parameter	Variable	Wert
Partikelanzahl	N	8192
Partikelladung	q_d	$-2512\ e$
Abschirmlänge	λ	$180\ \mu\text{m}$
Neutralgastemperatur	T	300 K
EPSTEIN-Koeffizient	β	$50 \dots 200\ \text{s}^{-1}$
Großer Torusradius	R_0	5,3 mm
Axiale Fallenfrequenz	$\omega_z = \omega_0$	$300\ \text{s}^{-1}$
Radiale Fallenfrequenz	$\omega_\rho = \omega_0$	$300\ \text{s}^{-1}$
Antriebskraft	F_i	0,8 g

In Abb. 7.2 sind in Graustufen die Strömungsfelder der drei Staubtori gezeigt, an denen exemplarisch die Mikrostruktur der Strömung untersucht werden soll. Zur Visualisierung der Strömungen wurden erneut zeitgemittelte Histogramme der Partikelpositionen erzeugt, die eine gute Näherung der Wahrscheinlichkeitsdichten für den Aufenthalt von Staubpartikeln liefern. In Abb. (a) ist das Ergebnis einer Simulation bei Neutralgasreibung mit einem EPSTEIN-Koeffizienten von $\beta = 100 \text{ s}^{-1}$ dargestellt. Die Zoneneinteilung in Beschleunigungszone (Zone 1), Hydraulic Jump (Zone 2) und Verzögerungszone (Zone 3) erfolgt analog zum vorangegangenen Kapitel. Der Staub rotiert im Uhrzeigersinn um das zentrale Void.

Die Abb. (b)–(d) zeigen drei Strömungsfelder in einer entwundenen Polardarstellung (φ - ρ -Koordinaten). In roter Farbe ist als Overlay jeweils der mittlere Geschwindigkeitsverlauf im Toruszentrum eingezeichnet. In allen dargestellten Strömungen bilden sich diskrete kreisförmige Staubschalen aus, die im Schnitt als einzelne Stromlinien zu erkennen sind. Das mittlere Strömungsfeld entspricht dem aus Abb. (a), einschließlich der Unterteilung in die drei Zonen. Dieser Torus soll im Folgenden als zentrales Beispiel für die Betrachtungen dienen. Im Anschluss (Abschn. 7.4) werden die Tori mit geringerer Reibungsdämpfung [$\beta = 50 \text{ s}^{-1}$, Abb. 7.2 (b)] und stärkerer Reibungsdämpfung [$\beta = 200 \text{ s}^{-1}$, Abb. 7.2 (d)] hierzu in Bezug gesetzt, um einen Überblick über die auftretenden Effekte zu geben.

In dem Torus bei moderater Reibung [$\beta = 100 \text{ s}^{-1}$, Abb. 7.2 (a) und (c)] nimmt in der Beschleunigungsphase (Zone 1, ca. 7:00 h bis 3:40 h) die Anzahl der Schalen schrittweise von sieben auf drei ab. Das Zusammenströmen der Schalen im Innern der Strömung kann als Sequenz struktureller Phasenübergänge interpretiert werden. Mit der Reduktion der Anzahl an Schalen verringert sich ebenfalls der Strömungsquerschnitt. Der Abstand zwischen den Schalen bleibt hiervon jedoch weitestgehend unbeeinflusst. Bezogen auf die Gesamtströmung ist zu erkennen, dass diese aufgrund der Zentrifugalkraft mit steigender Geschwindigkeit immer weiter nach außen in das Confinement getragen wird, so dass in Bereichen schneller Strömung das Zentrum des Strömungsquerschnitts und das Zentrum der Potentialfalle etwas gegeneinander verschoben sind. In Zone 2 (3:40 h bis 4:30 h) ist eine schlagartige Reduktion der Strömungsgeschwindigkeit zu beobachten. Zeitgleich spalten sich die Stromlinien auf und die Querschnittsfläche vergrößert sich. Diese Entwicklung entspricht der Charakterisierung des Hydraulic Jumps im vorangegangene Kap. 6. Eine detaillierte Betrachtung der Vorgänge in diesem Bereich wird im nächsten Abschnitt durchgeführt. In Zone 3 (4:30 h bis 7:00 h), der Verzögerungszone, vergrößert sich die Zahl der Schalen weiter und auch die Querschnittsfläche nimmt zu, bis die Strömung ihre Minimalgeschwindigkeit erreicht hat. Das Aufspalten der Stromlinien erfolgt bevorzugt im Strömungszentrum. Im Vergleich zur vorherigen Zone verlaufen die Vorgänge in diesem Bereich jedoch eher „glatt“, also gleichmäßig ohne plötzliche Veränderungen im Strömungsverhalten. Insgesamt scheinen die beiden äußeren Schalen von den strukturellen Phasenübergängen weitestgehend unbeeinflusst zu bleiben. Sie variieren hauptsächlich in ihrer Strömungsgeschwindigkeit und ihrem Radius.

Bei den ergänzenden Darstellungen für Tori mit geringer und starker Dämpfung zeigen sich sowohl Ähnlichkeiten als auch Unterschiede. Bei geringer Dämpfung [$\beta = 50 \text{ s}^{-1}$, Abb. 7.2 (b)] stellt sich die Situation in der Beschleunigungszone sehr ähnlich der vorangegangenen Beschreibungen dar. Aufgrund der geringeren Neutralgasreibung ist insgesamt eine höhere Strömungsgeschwindigkeit nachweisbar, infolgedessen auch der Zentrifugaleffekt ausgeprägter zu beobachten ist. Dies führt dazu, dass die schnelle Strömung die langsame/ruhende Staubpopulation in der unteren Torushälfte nicht zentral trifft, sondern versetzt zum Symmetriezentrum des Confinements.

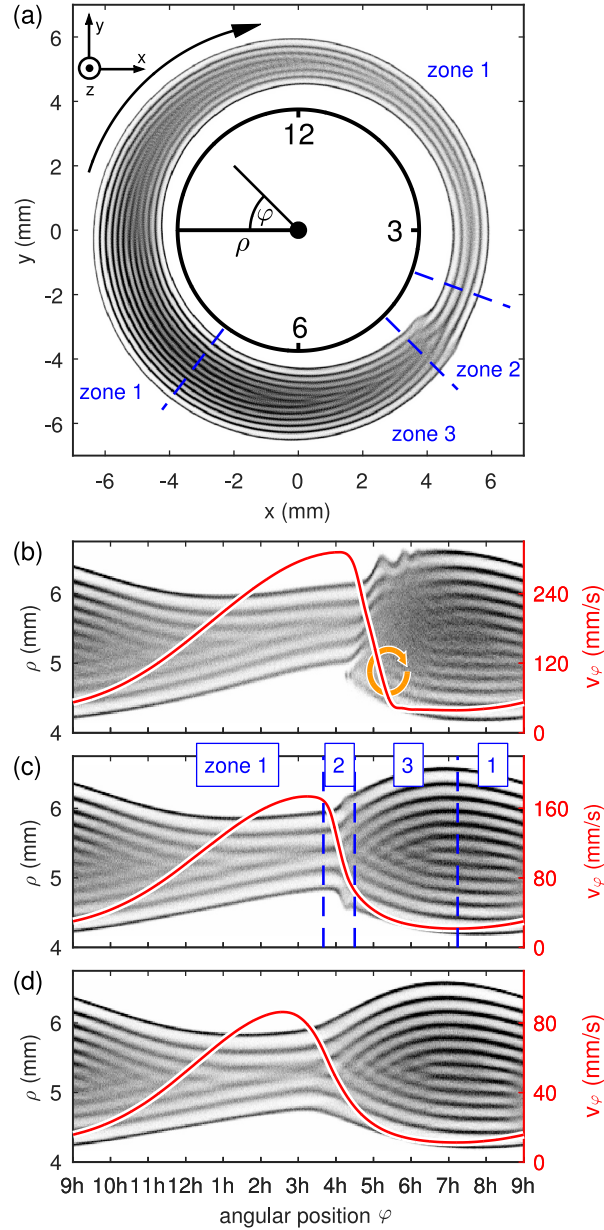


Abbildung 7.2: Strömungsfelder dreier Staubtori, die zur Analyse der Mikrostruktur der Strömung herangezogen wurden. (a) Wahrscheinlichkeitsdichte der Staubverteilung in einem vertikalen Schnitt der Dicke $\Delta z = 240 \mu\text{m}$ durch einen simulierten Torus bei einem EPSTEIN-Reibungskoeffizienten von $\beta = 100 \text{ s}^{-1}$. In Zone2 tritt ein Hydraulic Jump auf. (b) - (d) Strömungsfelder simulierter Staubtori in Polardarstellung bei Reibungskoeffizienten von $\beta_{(b)} = 50 \text{ s}^{-1}$, $\beta_{(c)} = 100 \text{ s}^{-1}$, $\beta_{(d)} = 200 \text{ s}^{-1}$. Die eingezeichneten roten Graphen zeigen die mittlere Geschwindigkeit im Strömungszentrum. Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen. (Grafik nach Ref. [122])

Auf diesem Wege wirkt am Auftreffpunkt ein Drehmoment, das einen makroskopischen Wirbel auf der Torusinnenseite antreibt. Dieser Wirbel ist durch einen orangefarbenen Pfeil in der entsprechenden Grafik angedeutet. Auf der Außenseite des Torus zeigt die abgelenkte Strömung hingegen einen Überschwinger, dessen gedämpfte Oszillation mit der Fallenfrequenz durch die Strömung weggetragen wird. Durch diese Effekte ist im entsprechenden Bereich keine systematische Ordnung der Partikel mehr zu erkennen. Stromabwärts dieser Ereignisse ordnet sich der Staub wieder von außen nach innen in Schalen an, während sich mit der Verlangsamung der Strömung auch die Querschnittsfläche vergrößert.

Im Falle der starken Dämpfung [$\beta = 200 \text{ s}^{-1}$, Abb. 7.2 (d)] ist die Strömungsgeschwindigkeit im Torus deutlich geringer als in den beiden anderen Fällen. Auch in diesem Falle variiert die Anzahl an Schalen zwischen sieben und drei und reduziert sich in der Beschleunigungsphase, während sie in der Verzögerungsphase wächst. Das Zusammenströmen und Aufspalten der Schalen erfolgt bevorzugt im Strömungszentrum. Der Zusammenhang zwischen Querschnitt und Strömungsgeschwindigkeit folgt in etwa der Kontinuitätsbedingung für eine inkompressible Flüssigkeit. Es sind nahezu keine Zentrifugaleffekte zu beobachten und auch keine schlagartigen Veränderungen der Geschwindigkeit und des Querschnitts, wie es in den beiden anderen Beispielen der Fall war.

7.2 Analyse der Makrophysik einer Staubströmung mit Hydraulic Jump

Um die Mikrophysik der Staubströmung in Zusammenhang mit den makroskopischen Strömungseigenschaften bringen zu können, soll an dieser Stelle zunächst ein Überblick über charakteristische makroskopische Größen der Staubströmung bei einer Dämpfungskonstanten von $\beta = 100 \text{ s}^{-1}$ gegeben werden. Diese sind in Abb. 7.3 zusammengefasst. In Abb. 7.3 (a) ist zunächst die kinetische Temperatur des Staubs T_d im Strömungsfeld farbig aufgetragen. Die Einfärbung weist auf eine starke Aufheizung des Staubes in der rechten Hälfte von Zone 2 hin – die kinetische Temperatur erreicht hier einige tausend Kelvin. Diese Aufheizung geschieht über den gesamten Strömungsquerschnitt, vom Zentrum bis zum Rand. Um die Temperaturentwicklung in der Strömung zu untersuchen, wurde in Abb. 7.3 (b) die mittlere kinetische Staubtemperatur entlang des Strömungszentrums dargestellt. Beginnend in Zone 1 (ca. 7:00 h) steigt sie von der Temperatur des Hintergrundgases gleichmäßig auf etwa 1350 K (bei 3:30 h). Im Bereich des Hydraulic Jumps (Zone 2) zeigt sich ein steiler Anstieg zu einem schmalen Maximum von etwa $T_d = 4400 \text{ K}$. In Zone 3 kehrt die kinetische Staubtemperatur mit einem exponentialfunktionsähnlichen Verlauf wieder auf die Neutralgastemperatur zurück. Als weiterer Graph ist in das Diagramm 7.3 (b) der Kopplungsparameter Γ eingezeichnet. Wie im vorangegangenen Kapitel ist zu diesem Zeitpunkt noch kein akkurater Wert für die Staubbichte n_d ermittelt, so dass der WIGNER-SEITZ-Radius mit Hilfe des Abstands zum nächsten Nachbarn d_{NN} über $a_{WS} \approx d_{NN}/1.60$ abgeschätzt wurde [294]. Entsprechend der Diskussion in Abschn. 7.6 am Ende dieses Kapitels kann auf diesem Wege eine gute Abschätzung des Kopplungsparameters erhalten werden. Im Bereich vieler Schalen (ca. 7:00 h) erreicht der Kopplungsparameter Werte von $\Gamma \approx 3000$, sinkt jedoch in Zone 1 auf etwa $\Gamma \approx 600$ bei 3:30 h. Aufgrund der hohen Kopplung ist in diesem Bereich dennoch von einer kristallinen Strömung auszugehen, deren Ordnung im Hydraulic Jump, in dem die Kopplung auf $\Gamma \approx 240$ fällt, zerstört wird.

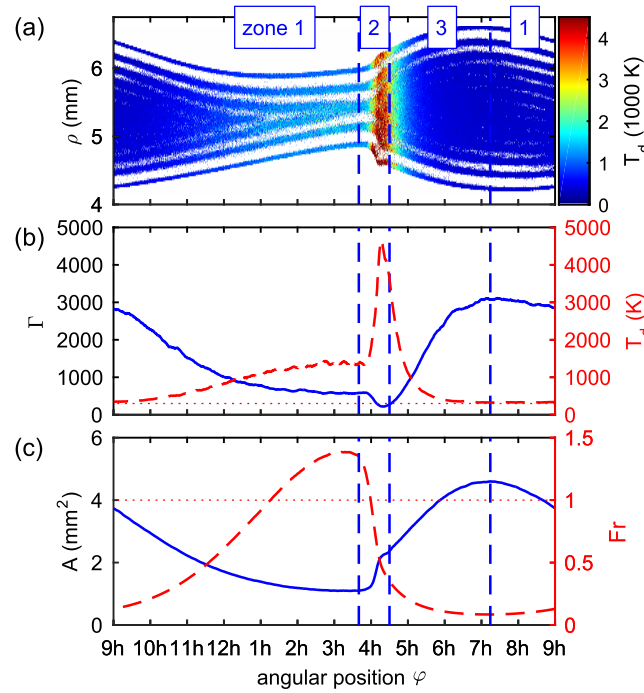


Abbildung 7.3: Charakteristische Größen eines Staubtorus bei mittleren Dämpfungswerten. (a) Kinetische Staubtemperatur T_d im Strömungsfeld. Der starke Temperaturanstieg in Zone 2 füllt den gesamten Strömungsquerschnitt. (b) In Blau ist durchgezogen der Kopplungsparameter Γ entlang des Strömungszentrums eingezeichnet. In Rot ist gestrichelt die zugehörige kinetische Staubtemperatur T_d gezeigt. (c) Querschnittsfläche A (blau durchgezogen) und FROUDE-Zahl (rot gestrichelt). Die FROUDE-Zahl durchschreitet die kritische Bedingung ($Fr = 1$), die einen Hydraulic Jump charakterisiert, in Zone 2. (Grafik nach Ref. [122])

In Abb. 7.3 (c) sind die FROUDE-Zahl für die Staubströmung [$Fr = v/c = \sqrt{2}v_\varphi / (\omega_0 a)$ mit der Geschwindigkeit langwelliger Oberflächenwellen c , vgl. Abschn. 6.2] und die Querschnittsfläche der Strömung eingezeichnet. Die FROUDE-Zahl durchschreitet in Zone 2 den kritischen Wert von $Fr = 1$ von superkritischer zu subkritischer Strömung. Dieser Übergang charakterisiert typischerweise den Ort des Hydraulic Jumps und koinzidiert mit der schlagartigen Aufweitung des Strömungsquerschnitts und der plötzlichen kinetischen Aufheizung der Staubpartikel.

Diese Beobachtungen stimmen gut mit den Untersuchungen aus dem vorangegangenen Kapitel überein, so dass auch hier der schlagartige Übergang als Hydraulic Jump identifiziert werden kann. Im Folgenden sollen nun durch weiterführende (mikroskopische) Analysen Antworten auf die sich stellenden Fragen gefunden werden, wie z. B.:

- Welche Vorgänge charakterisieren den Hydraulic Jump mikroskopisch?
- Was ist ursächlich für die plötzliche Aufheizung, die zum Verlust der starken Kopplung während des Hydraulic Jumps führt?
- Worin bestehen mikroskopisch die Unterschiede zwischen der Vereinigung von Stromlinien in der Beschleunigungsphase und der Aufspaltung der Schalen in der Verzögerungsphase?

7.3 Analyse der Mikrophysik einer Staubströmung mit Hydraulic Jump

Der fundamentale Ansatz zur Untersuchung der Mikrostruktur des vorliegenden Systems besteht in der Betrachtung von Paaren nächster Nachbarn (NN). Der mittlere Minimalabstand eines Partikels zu seinem NN ist in Abb. 7.4 (a) orts aufgelöst dargestellt. Die äußere Schale ist von der Darstellung ausgeschlossen, da Oberflächeneffekte die Auswertung störungsanfällig und fehlerhaft werden lassen. Die Einfärbung des Strömungsfeldes zeigt deutlich eine Variation des NN-Abstandes sowohl in Strömungsrichtung als auch in radialer Richtung an. Die Variation in Toroidalrichtung scheint mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit verknüpft: Mit beschleunigender Strömung nimmt der Abstand zu, mit verzögernder Strömung ab. Im Strömungsquerschnitt sind im Zentrum kleine Abstände und größer werdende Abstände in Richtung der Oberfläche zu finden.

Tiefer gehende Erkenntnisse bezüglich der Strukturänderungen in der Strömung liefert die Verteilung des Winkels θ , unter dem der nächste Nachbar in Bezug auf die Strömungsrichtung bevorzugt anzutreffen ist. Beispielhafte Ergebnisse dieser Analyse sind in Abb. 7.4 (b) dargestellt. Hierbei wurde die Winkelverteilung mittels der zugehörigen Verteilung für isotrope Nachbarschaften normiert, so dass die Abweichung bezüglich letzterer direkt zu erkennen ist. Entsprechend ist die Verteilung für den Fall einer isotropen Verteilung als Konstante rot gestrichelt eingezeichnet. Das linke Histogramm zeigt die Situation nahe der 12:00 h-Position im Torus. Die Verteilung zeigt eine deutliche Verschiebung in Richtung $\theta = \pi/2$, so dass der NN also bevorzugt in transversaler Richtung, bezogen auf die Strömungsrichtung, anzutreffen ist. Das rechte Histogramm zeigt hingegen die Situation nahe 4:00 h und weist deutliche Unterschiede auf. In diesem Falle ist eine Verschiebung der Verteilung der nächsten Nachbarn in Richtung Strömungsachse zu erkennen.

Allein diese Unterschiede in der Winkelverteilung der nächsten Nachbarn sind ein deutlicher Anhaltspunkt dafür, dass in der inhomogenen Strömung Effekte auf der mikroskopischen Skala eine Rolle spielen und eine Umordnung der Partikel stattfindet. Um im Folgenden die zugrunde liegenden Mechanismen untersuchen zu können und die soeben genannte Vermutung zu verifizieren, bedarf es zunächst einer sauberen Definition der „Nachbarschaft“ von Partikeln sowie einer Größe zur Bemessung der Form bzw. Verformung dieser Nachbarschaft. Beides soll im folgenden Unterabschnitt geliefert werden.

7.3.1 Analyse der Partikelnachbarschaften

Bei strukturellen Untersuchungen staubiger Plasmen auf mikroskopischer Ebene ist es üblich, die Nachbarn eines Partikels über die DELAUNAY-Triangulation zu bestimmen. Hierbei handelt es sich um den dualen Graphen der bekannteren VORONOI-Analyse [29, 264, 298]. Diese Methoden erlauben es, die Partikeldichte n_d direkt als Kehrwert des mittleren Volumens der VORONOI-Zellen zu erhalten. Die auf diesem Wege ermittelte mittlere Dichte für das Strömungszentrum ist in Abb. 7.4 (a) als rote Linie eingezeichnet. Im Bereich der größten Querschnittsfläche (ca. 7:00 h) ist die maximale Dichte von etwa $n_{d,\max} \approx 150 \text{ mm}^{-3}$ zu finden. Von hier aus findet eine kontinuierliche Abnahme der Dichte in Zone 1 bis auf $n_{d,\min} \approx 60 \text{ mm}^{-3}$ statt. Im Bereich des Hydraulic Jumps (Zone 2) erfährt der Graph eine verhältnismäßig starke Krümmung und geht über in eine steigende Flanke, die parallel zur Zunahme des Strömungsquerschnitts verläuft.

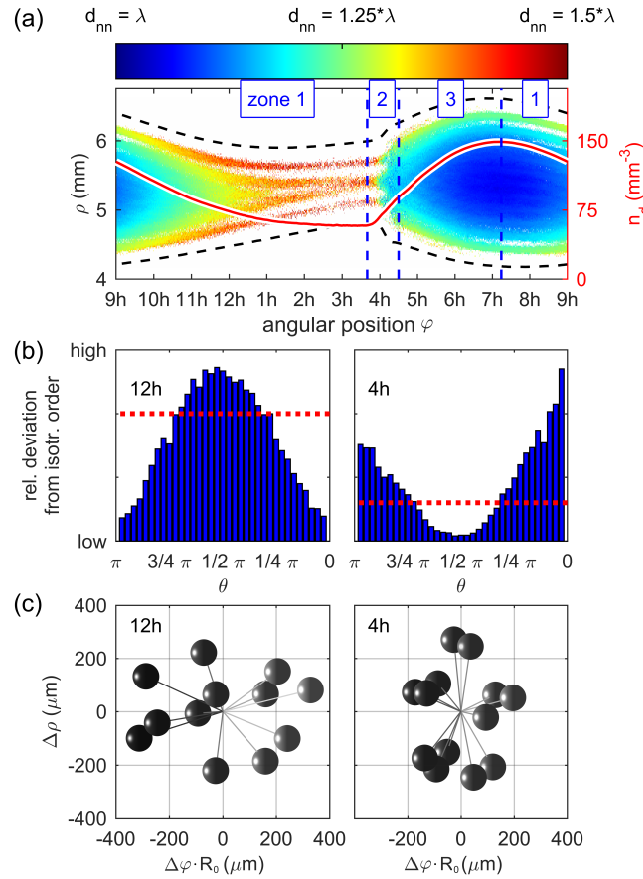


Abbildung 7.4: Analyse der Staubströmung auf mikroskopischer Skala. (a) Farbkodierte Darstellung des mittleren Abstands zum nächsten Nachbarn. Der rote, durchgezogene Graph zeigt die Partikeldichte entlang des Strömungszentrums. (b) Relative Abweichung der Winkelverteilung für das Antreffen des nächsten Nachbarn gegenüber einer isotropen Verteilung (rot gestrichelt). Es sind die Situationen für 12:00 h (linke Abb.) und für 4:00 h (rechte Abb.) dargestellt. (c) Beispielhafte Nachbarschaften nahe der 12:00 h-Position (linke Abb.) und nahe der 4:00 h-Position (rechte Abb.). Eine prolata bzw. oblate Verformung der Einheitszelle ist direkt zu erkennen. (Grafik nach Ref. [122])

Diese Entwicklung steht in guter Übereinstimmung mit der Verkleinerung des Abstandes zum nächsten Nachbarn entlang der Strömungsrichtung, vermag jedoch nicht die relative Ausrichtung zwischen nächstem Nachbarn und Strömungsrichtung zu erklären. Aus diesem Grunde werden im folgenden Schritt die Nachbarschaften von Partikeln genauer betrachtet.

Hierfür wird zunächst die mathematische Definition zur Bestimmung der Nachbarpartikel angepasst. Grundsätzlich werden die Nachbarn über die DELAUNAY-Triangulation festgelegt. Diese liefert diejenigen Partikel, die zur VORONOI-Zelle beitragen. Dies führt jedoch dazu, dass bereits Partikel, die lediglich eine sehr kleine Ecke dieser Zelle beschneiden, als vollwertige Nachbarn gezählt werden. Aufgrund des statistischen Anteils der Partikelbewegung würde dies zu einem starken „Rauschen“ der Nachbarschaft führen [299]. Um dieses Rauschen zu unterdrücken, werden derlei Partikel aus der Analyse der Nachbarschaften ausgeschlossen und lediglich Partikel als Nachbarn gezählt, die einen Beitrag von mehr als 0,5% zur Oberfläche der VORONOI-Zelle leisten¹.

¹ Nach einem Ratschlag von B. Steinmüller, private Kommunikation.

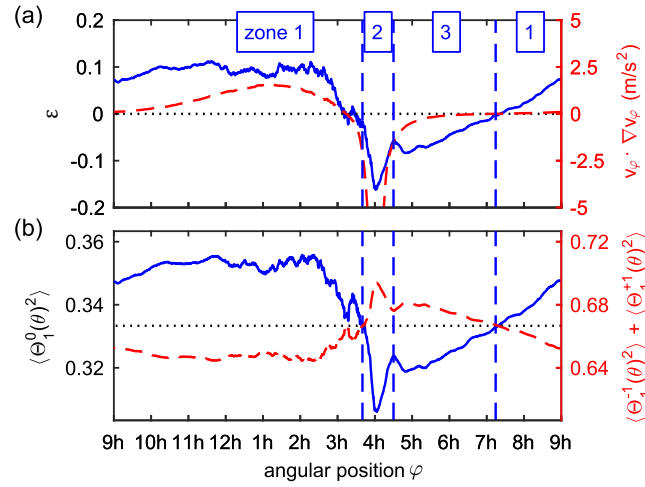


Abbildung 7.5: Weiterführende Analyse der Staubströmung auf mikroskopischer Skala. (a) Elliptizität der Nachbarschaften entlang des Strömungszentrums (blauer durchgezogener Graph) sowie Beschleunigung der Strömung (roter gestrichelter Graph). (b) Gewichtung der Nachbarschaften mit Hilfe normierter Kugelflächenfunktionen (blau durchgezogen: Projektion auf die Längsrichtung, rot gestrichelt: Projektion auf die Querrichtungen). (Grafik nach Ref. [122])

Zwei beispielhafte Nachbarschaften sind in Abb. 7.4 (c) dargestellt. In dieser Darstellungsform zeigt die horizontale Achse die Strömungsrichtung an (Toroidalkoordinate) und die vertikale Achse den radialen Versatz in Bezug auf das betrachtete Zentralteilchen. Die linke Nachbarschaft stammt von einem Partikel nahe der 12:00 h-Position und zeigt deutlich eine prolate (verlängerte) Form. Im Gegensatz hierzu ist im rechten Bild, einer Nachbarschaft aus dem Bereich um 4:00 h, eine oblate (abgeplattete) Form zu erkennen. In den zugehörigen Projektionen der Partikel mit Blick in Strömungsrichtung ist im Strömungszentrum keine systematische Verformung auszumachen.

Als quantitatives Maß für die Verformung der Nachbarschaften entlang der Strömungsrichtung wird zunächst das erste Element des Quadrupoltensors der M Nachbarpartikel (im lokalen Koordinatensystem um das betrachtete Partikel) gewählt. Mit Hilfe dieser Größe ist eine systematische Untersuchung der Deformation der Nachbarschaften entlang der Strömung möglich und auch kleine Verformungen können festgestellt werden. Die lokalen Koordinaten sind hier: Strömungsrichtung \vec{e}_φ , radiale Richtung \vec{e}_ρ und z -Richtung \vec{e}_z . Das Tensorelement berechnet sich zu

$$Q_{\varphi\varphi} = \sum_{j=1}^M \left[3 (\vec{r}_j \cdot \vec{e}_\varphi)^2 - |\vec{r}_j|^2 \right] \quad (7.1)$$

mit den Relativkoordinaten der Nachbarn \vec{r}_j . Um die Tensorwerte zum Vergleich der Verformung heranziehen zu können, obwohl sich die Interpartikelabstände im Verlauf des Torus ändern, wird der Tensorwert mittels des Quadrats des mittleren Nachbarabstandes normiert. Auf diesem Wege erhält man einen Wert, welcher der Elliptizität ε der Nachbarschaft ähnelt und der im Folgenden auch so bezeichnet werden soll:

$$\varepsilon \approx \frac{Q_{\varphi\varphi}}{\langle |\vec{r}_j|^2 \rangle} \quad (7.2)$$

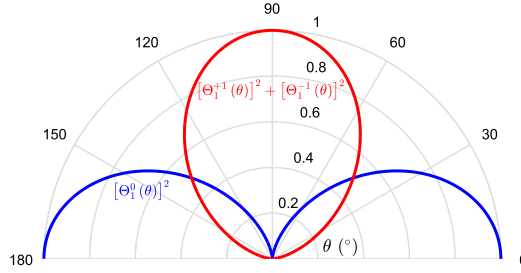


Abbildung 7.6: Gewichtungsfunktionen für Longitudinal- und Transversalrichtung (blau bzw. rot). Für festes θ addieren sich die Funktionen in radialer Richtung stets zu eins.

Die mittlere Elliptizität entlang des Strömungszentrums ist als Maßzahl der Verformung der Nachbarschaft in Abb. 7.5 (a) gezeigt. Beginnend mit einem Wert von $\varepsilon = 0$ bei 7:00 h, der für unverformte Nachbarschaften in Bezug auf Verlängerung oder Abplatten in Strömungsrichtung steht, steigt sie auf einen Wert von etwa $\varepsilon \approx +0.1$ (prolat) im Bereich von 10:00 h bis 2:30 h. Von hier aus beginnt eine steile Abnahme und die Elliptizität fällt auf ihr Minimum von $\varepsilon \approx -0.15$ (oblat) bei 4:00 h. Von hier aus steigt der Wert erneut mit leichten Modulationen bis er bei ca. 7:00 h wieder einen Wert von Null erreicht.

Eine weitere Möglichkeit, die Form der Nachbarschaften zu bewerten, besteht in der Gewichtung der Richtungen, in denen die M Nachbarn eines Partikels auftreten, mit Kugelflächenfunktionen. Da im vorliegenden Fall die Verformung in Bezug auf die Strömungsachse interessiert, wird im Folgenden lediglich der Winkelanteil dieser Funktionen betrachtet. Dieser ist proportional zu den zugeordneten Legendrepolyomen $P_1^m(\cos\theta)$ [$m \in \{-1, 0, 1\}$]. Diese Funktionen werden so normiert, dass die Summe der gewichteten Werte wieder den Ursprungswert ergibt. Als Gewichtungsfunktionen ergeben sich auf diese Weise die Quadrate

$$[\Theta_1^{\pm 1}(\theta)]^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \quad \text{und} \quad (7.3)$$

$$[\Theta_1^0(\theta)]^2 = \cos^2 \theta. \quad (7.4)$$

Eine Bewertung mit dem zu $m = 0$ gehörigen Gewicht liefert eine Abschätzung des Beitrages der longitudinalen Richtung (Strömungsrichtung). Da diese Richtung nur eine von drei Dimensionen umfasst, ist der Erwartungswert einer isotropen Verteilung hier $1/3$. Die Gewichtungen mit den Funktionen für $m \in \{-1, 1\}$ sind identisch und ihre Summe liefert einen Schätzwert des Beitrages der transversalen Richtung. Da quer zur Strömungsrichtung zwei Dimensionen abgedeckt werden, ergibt sich hier für den Fall einer isotropen Verteilung ein Erwartungswert von $2/3$. Die Gewichtungsfunktionen sind in Abb. 7.6 in Polardarstellung abgebildet. In dieser Darstellungsform bezeichnet die horizontale Achse die Strömungsrichtung und der zentrale Winkel θ den Winkel bezüglich dieser Achse. Die konzentrischen Kreise zeigen konstante Radien. Der blau eingezeichnete Graph stellt die Gewichtungsfaktoren $[\Theta_1^0(\theta)]^2$ für die longitudinale Richtung dar, der rote Graph die Summe $[\Theta_1^{-1}(\theta)]^2 + [\Theta_1^{+1}(\theta)]^2$ zur Gewichtung der transversalen Richtung. Die Gewichtungsfunktionen addieren sich entsprechend der gewählten Normierung in radialer Richtung stets zu eins, so dass die Summe der Komponenten eines gewichteten Wertes stets wieder den Ursprungswert ergibt.

Da in der folgenden Betrachtung lediglich die Abhängigkeit von θ , dem Relativwinkel zur Strömungsrichtung, interessiert, gilt diese Bewertung unabhängig von dem Winkel ϕ , der das dargestellte Koordinatensystem um die dritte Dimension erweitern würde. Anschaulich bedeutet die Unabhängigkeit von dieser Komponenten, dass für eine dreidimensionale Darstellung die dargestellten Funktionen um die horizontale Achse rotiert werden müssten, so dass aus der Longitudinalkomponente eine Hantel und aus den Transversalkomponenten ein Ring würde.

Das Ergebnis der direkten Bewertung der Verteilungen der Nachbarschaften mit diesen Gewichtungsfunktionen ist in Abb. 7.5 (b) dargestellt. Der blaue durchgezogene Graph stellt die Gewichtung mit $[\Theta_1^0(\theta)]^2$ dar und weist große Ähnlichkeiten zur Elliptizität auf. Ein Wert größer als $1/3$ beschreibt hierbei eine prolata Verformung, ein Wert kleiner als $1/3$ eine oblate. Der rote gestrichelte Graph stellt die Summe $[\Theta_1^{-1}(\theta)]^2 + [\Theta_1^{+1}(\theta)]^2$ dar und ist umgekehrt zu interpretieren: Ein Wert größer als $2/3$ beschreibt hier eine oblate Verformung und ein Wert kleiner als $2/3$ eine prolata. Aufgrund der Normierung der Gewichtungsfunktionen addieren sich die beiden Kurven (longitudinale und transversale Gewichtung) stets punktweise zu eins.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass in der vorliegenden Arbeit in Abbildungen, in denen die Zerlegung einer Größe in Longitudinal- und Transversalanteil dargestellt ist, die linke Ordinate stets die Skalierung für den Longitudinalanteil beschreibt und die rechte Ordinate die Skalierung für den Transversalanteil. Um nun eine direkte Vergleichbarkeit zwischen den Kurven und der Präferenz einer Richtung zu ermöglichen, ist die Achse für den Transversalanteil stets im Verhältnis 2:1 zum Longitudinalanteil skaliert.

Eine Verknüpfung makroskopischer mechanischer Spannung und lokaler, mikroskopischer Deformation ist zu erkennen, wenn die konvektive Beschleunigung der Strömung zur Betrachtung hinzugenommen wird. Diese Größe ist in Abb. 7.4 (a) als roter, gestrichelter Graph eingezeichnet. Sie zeigt eine positive Beschleunigung im Strömungsfeld im Bereich von ungefähr 7:00 h bis 3:30 h und eine starke Verzögerung von $v_\varphi \cdot \nabla v_\varphi = -10 \text{ m s}^{-2}$ nahe 4:00 h. Der Übergang zwischen Beschleunigung und Verzögerung – sowie umgekehrt – erfolgt genau an den Stellen, an denen die Nachbarschaften ihre Form von prolata in oblate, respektive oblate in prolata ändern. Darüber hinaus koinzidieren die maximale Verzögerung und die maximale oblate Verformung. Dieser Zusammenhang zeigt im Detail, wie die Beschleunigung Spannung auf die Nachbarschaften ausübt und diese darüber dehnt, während die Verzögerung für eine Stauchung und somit oblate Verformung in Strömungsrichtung sorgt.

Abschließend zu diesen „statischen“ Betrachtungen der Nachbarschaften (bisher wurden lediglich Partikelpositionen, nicht aber Geschwindigkeiten zu Analyse Zwecken herangezogen) soll noch ein weiteres direktes Ergebnis der Analyse mittels der Nachbarschaftserkennung präsentiert werden. Dies ist die Anzahl an Nachbarpartikeln. In den zuvor gezeigten Beispielen [Abb. 7.4 (c)] liegt diese Zahl bei 12 im linken Bild und bei 13 in der rechten Darstellung. Die mittlere Anzahl an Nachbarn im zentralen Strömungsfeld ist farbkodiert in Abb. 7.7 (a) dargestellt. Auch hier wurde – um Randeffekte und Fehler auszuschließen – die äußere Schale von der Darstellung ausgeschlossen. Insgesamt variiert die Anzahl ermittelter Nachbarn nur wenig und besitzt über weite Winkelbereiche im Mittel einen Wert von 12,5 mit einer empirischen Standardabweichung zwischen 1 und 1,5. Nur gegen Ende der Beschleunigungsphase (1:30 h bis 4:00 h) sind geringfügig kleinere Nachbaranzahlen zu

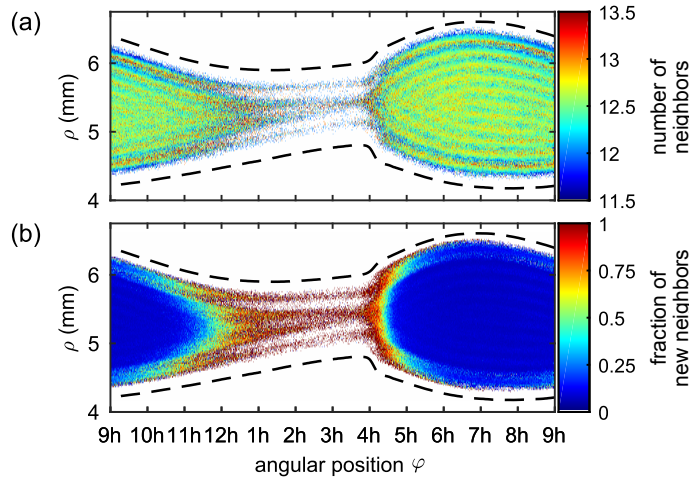


Abbildung 7.7: (a) Anzahl der Nachbarpartikel, die mit Hilfe der angepassten DELAUNAY-Triangulation gezählt wurden. Die empirische Standardabweichung beträgt über die gesamte Darstellungsfläche Werte im Bereich 1 bis 1,5. (b) Quotient aus der Anzahl „neuer“ Nachbarpartikel nach 50 Zeitschritten und der Gesamtzahl an Nachbarpartikeln. Null bedeutet keine Veränderung, eins bedeutet, dass alle Partikel ausgetauscht wurden.

finden.¹ Insgesamt weisen die konstante Zahl an Nachbarn und die geringe Standardabweichung auf ein hohes Maß an momentaner Ordnung im Staubtorus hin.

Als zweites Maß ist in Abb. 7.7 (b) der Anteil der „neuen“ Nachbarn an der Nachbarszahl nach fünfzig Zeitschritten dargestellt. Hierfür wurden für jedes Partikel die Nachbarschaftslisten verglichen und der Anteil gleicher und veränderter Nachbarn registriert. Dargestellt ist nun der Quotient „(50 Zeitschritte zuvor nicht registrierte Nachbarn) / (Anzahl an Nachbarn)“. Es zeigt sich, dass im Bereich von 4:30 h bis 11:00 h die Nachbarschaften dahingehend sehr stabil sind, dass kaum Austausch von Nachbarn stattfindet. Dies ändert sich relativ zügig zwischen 11:00 h und 1:00 h, wo der Farbverlauf eine Erhöhung der Wechselaktivität in den Nachbarschaften anzeigt. Im Anschluss an diesen Bereich, den Hydraulic Jump einschließend, zeigt die rote Färbung, dass nach fünfzig Zeitschritten der Simulation praktisch alle Nachbarpartikel ausgetauscht sind. Bei dem Vergleich mit den charakteristischen makroskopischen Größen der Staubströmung (vgl. Abb. 7.3) fällt auf, dass der Bereich hoher Wechselaktivität in der Nachbarschaft dort auftritt, wo sich die Stromlinien vereinigen und bereits eine erhöhte Temperatur registriert wurde. Darüber hinaus ist hier auch der Kopplungsparameter im Vergleich zu dem Bereich „fester“ Nachbarschaften geringer. Dies kann insbesondere als Anzeichen dafür gewertet werden, dass unmittelbar vor und nach dem Zusammen- und Auseinanderströmen der Stromlinien innerhalb von Strömungsschalen keine feste Ordnung herrscht. Wenn dem so wäre, dann fände kein Austausch der Nachbarpartikel statt. Um festzustellen, wie der Austausch von Nachbarn mikroskopisch verläuft, werden im Folgenden Maße eingeführt, die die Dynamik der Nachbarschaften zu charakterisieren und zu bemessen vermögen.

¹ Anmerkung: Die durchschnittliche Anzahl an Nachbarn von 12,5 liegt höher, als sie in den meisten Regulkristallen zu erwarten wäre. Bezüglich der Struktur sind allein hieraus jedoch noch keine Rückschlüsse zu ziehen. Die erhöhte Anzahl ist typisch für die angewandte Auswertungsmethode, da – wie erläutert – bereits kleine Änderungen in der Geometrie der Nachbarschaften für zusätzliche Facetten der WIGNER-SEITZ-Zelle und damit für zusätzliche Nachbarn sorgen können. Über den verwendeten „Nachbarschaftsfilter“, also den Mindestbeitrag zur Oberfläche der Zelle, kann der Mittelwert variiert werden, was im vorliegenden Fall über weite Bereiche jedoch keinen Einfluss auf die Systematik (konstante Anzahl, geringe empirische Standardabweichung) nimmt.

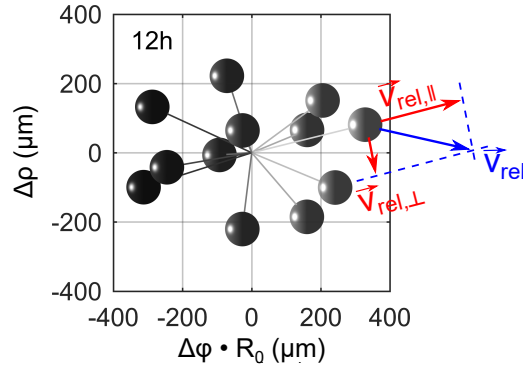


Abbildung 7.8: Abbildung einer typischen Partikelnachbarschaft. Das Nachbarpartikel rechts außen bewegt sich mit der Relativgeschwindigkeit \vec{v}_{rel} gegenüber dem Zentralpartikel. Der Anteil dieser Bewegung parallel zum Verbindungsvektor der Partikel besitzt kompressiven Charakter, der Bewegungsanteil orthogonal hierzu ist scherartig und beeinflusst das Volumen der WIGNER-SEITZ-Zelle kaum.

7.3.2 Analyse der Dehnungs- und Rotationsraten

Die bisherigen Betrachtungen beinhalteten im Wesentlichen statische, geometrische Größen. In diesem Abschnitt wird der Fokus nun auf die dynamische Entwicklung der Nachbarschaften gelenkt. Zu diesem Zwecke wurden zwei neue Maße entwickelt: die Dehnungsrate (engl.: strain rate) S und die Rotationsrate (engl.: rotation rate) Ω . Diese Maße adaptieren die mittlere lokale Divergenz (engl.: mean local divergence) $\Psi_{c,\ell}$ und den mittleren lokalen Rotor (engl.: mean local rotor) $\Psi_{s,\ell}$ – wie sie von der Instantanmodenanalyse (engl.: instantaneous normal mode analysis, INM) her bekannt sind – für die vorliegende Situation. In der INM werden diese Maße zur Charakterisierung von Kompressions- und Schereigenschaften von Eigenmoden herangezogen [53, 300, 301]. Im vorliegenden Fall sollen die Maße dazu dienen zu ermitteln, ob sich ein Partikelpaar annähert oder voneinander entfernt (Dehnungsrate) oder ob die Partikel umeinander rotieren (Rotationsrate).

Zur Veranschaulichung ist in Abb. 7.8 eine Partikelnachbarschaft eingezeichnet. Modellhaft wird das Nachbarpartikel rechts außen betrachtet. In Blau ist die Relativgeschwindigkeit des Partikels gegenüber dem Zentralpartikel eingezeichnet, in Rot die Zerlegung dieser Geschwindigkeit in die Komponente $\vec{v}_{\text{rel},||}$, die parallel zum Verbindungsvektor des betrachteten Partikels und des Zentralpartikels liegt, und der hierzu orthogonalen Komponente $\vec{v}_{\text{rel},\perp}$. Es ist sofort zu erkennen, dass eine Bewegung entlang der Verbindungslinie der Partikel kompressiven/expansiven Charakter besitzt und direkt die Größe der WIGNER-Seitz-Zelle beeinflusst, während die Orthogonalbewegung das Volumen dieser Zelle nur marginal verändert und eher scherartig ist. Mit Hilfe dieser Zerlegung der Relativgeschwindigkeit lauten nun die Definitionen für Dehnungsrate S und Rotationsrate Ω für ein Partikelpaar

$$S = \frac{v_{\text{rel},||}}{|\vec{r}_{\text{rel}}|} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \quad \text{und} \quad (7.5)$$

$$\Omega = \frac{|v_{\text{rel},\perp}|}{|\vec{r}_{\text{rel}}|} = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)|}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \quad (7.6)$$

mit dem Verbindungsvektor zwischen dem betrachteten Partikelpaar \vec{r}_{rel} , der relativen Geschwindigkeitskomponente parallel zu diesem Vektor $\vec{v}_{\text{rel},||}$ sowie dem Betrag der Geschwindigkeitskomponente orthogonal zu dem Verbindungsvektor $|\vec{v}_{\text{rel},\perp}|$.

Werden diese Maße auf alle M Nachbarpartikel eines gewählten Staubpartikels i angewendet, so kann die mittlere Dehnungsrate als quantitativer Indikator für die Expansions- oder Kompressionsrate der entsprechenden Nachbarschaft angesehen werden. Entsprechend liefert die mittlere Rotationsrate Auskunft darüber, wie groß die Scheraktivität in der Nachbarschaft ist. Damit sind die mittlere Dehnungsrate (mean strain rate) S_i und die mittlere Rotationsrate (mean rotation rate) Ω_i definiert durch

$$S_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \quad \text{und} \quad (7.7)$$

$$\Omega_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{|(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times (\vec{v}_j - \vec{v}_i)|}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}. \quad (7.8)$$

In Abb. 7.9 (a) ist die mittlere Dehnungsrate als durchgezogene schwarze Linie eingezeichnet. Zur besseren Ablesbarkeit ist die gleiche Kurve noch einmal um einen Faktor fünf vergrößert als rot-gestrichelte Linie dargestellt. Der grau schattierte Hintergrund zeigt die empirische Standardabweichung der Dehnungsrate.¹

Von ungefähr 7:00 h an bis ca. 3:30 h besitzt die mittlere Dehnungsrate einen leicht positiven Wert, wechselt ihr Vorzeichen jedoch unmittelbar vor dem Hydraulic Jump. An dieser Stelle treten eine rapide Abnahme der Dehnungsrate und ein ausgeprägtes Minimum auf. Im Anschluss an dieses Extremum bleibt die Dehnungsrate zunächst negativ und kehrt gleichmäßig auf den Wert Null bei ca. 7:00 h zurück. Insgesamt variiert der Wert der mittleren Dehnungsrate im Verlauf des Torus zwischen $2 \text{ s}^{-1} > S > -11 \text{ s}^{-1}$, während die Standardabweichung im Bereich $15 \text{ s}^{-1} < \sigma(S) < 50 \text{ s}^{-1}$ liegt. Für eine einzelne Nachbarschaft bedeutet diese hohe Abweichung im Verhältnis zum Mittelwert der Dehnungsrate, dass es eine hohe Fluktuation in Richtung der einzelnen Nachbarn gibt. Der kleine Mittelwert zeigt jedoch, dass sich die damit verbundenen Effekte in der Summe gegenseitig ausgleichen und so das VORONOI-Volumen weitestgehend erhalten bleibt.

Um festzustellen, ob die Spannung vorzugsweise in Strömungsrichtung aufgebaut und relaxiert wird oder aber in transversaler Richtung, wird die Dehnungsrate mit den zuvor eingeführten Gewichtungsfunktionen zerlegt. Die Ergebnisse für die mittlere longitudinale Dehnungsrate S_l sowie für die mittlere transversale Dehnungsrate S_t sind als durchgezogene blaue Linie bzw. rote gestrichelte Linie in Abb. 7.9 (b) eingezeichnet. Es ist gut zu erkennen, dass nahezu die gesamte Spannung in Longitudinalrichtung auf- und abgebaut wird. Die Dehnungsrate in transversaler Richtung zeigt lediglich kleine Variationen.

Die gleiche zweistufige Analyse wird nun auf die Rotationsrate angewendet. Die mittlere Rotationsrate im Strömungszentrum Ω ist in Abb. 7.9 (c) dargestellt, die Zerlegung in Longitudinal- und Transversalanteil in Abb. (d). Die mittlere Rotationsrate steigt während der Beschleunigungsphase von $\Omega \approx 20 \text{ s}^{-1}$ auf $\Omega > 35 \text{ s}^{-1}$ und geht dann bei ca. 3:30 h in einen steilen Anstieg über. Am Ort des Hydraulic Jumps erreicht die Rotationsrate ihr Maximum von etwa $\Omega_{\text{max}} = 70 \text{ s}^{-1}$. Von diesem Extremum aus kehrt sie in der Verzögerungsphase auf ihren Minimalwert zurück.

¹ Weitergehende Analysen der Verteilung der Abweichung zeigen, dass sie für feste Winkel tatsächlich GAUSS-artig ist, so dass das Maß „empirische Standardabweichung“ in diesem Falle tatsächlich auch die Breite der statistischen Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt.

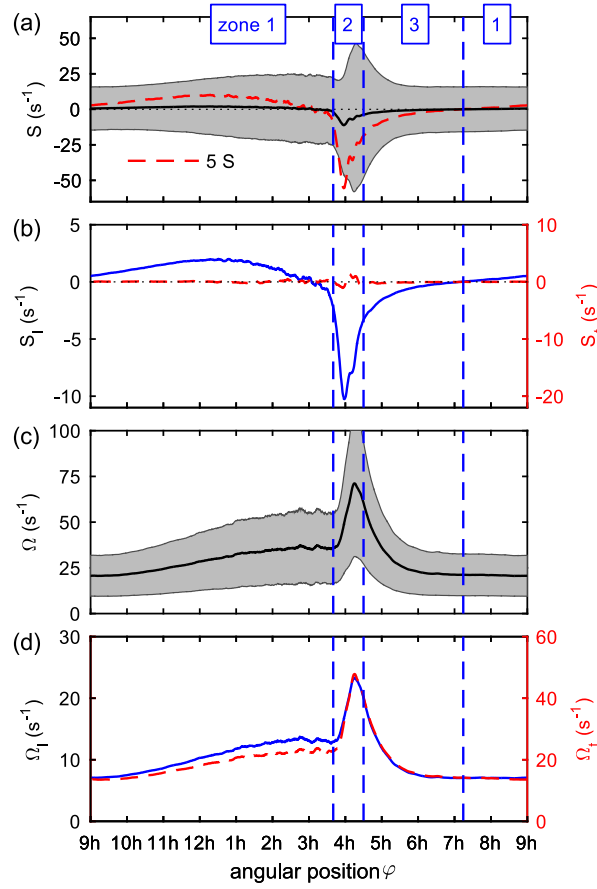


Abbildung 7.9: Dargestellt sind mittlere Dehnungs- und Rotationsraten entlang des Strömungszentrums. (a) Mittlere Dehnungsrate S (schwarze durchgezogene Linie). Zur besseren Lesbarkeit ist derselbe Graph noch einmal um einen Faktor fünf vergrößert dargestellt (rot gestrichelte Linie). Die graue Schattierung umfasst die empirische Standardabweichung der Dehnungsrate. (b) Zerlegung der mittleren Dehnungsrate in Longitudinalanteil (blaue durchgezogene Linie, gewichtet mit $[\Theta_1^0(\theta)]^2$) und Transversalanteil (rote gestrichelte Linie, gewichtet mit $[\Theta_1^{-1}(\theta)]^2 + [\Theta_1^{+1}(\theta)]^2$). (c) Mittlere Rotationsrate (schwarze durchgezogene Linie) und in grauer Schattierung die zugehörige empirische Standardabweichung. (d) Zerlegung der mittleren Rotationsrate in Longitudinalkomponente (blauer durchgezogener Graph) und Transversalkomponente (roter gestrichelter Graph). (Grafik nach Ref. [122])

Die in grau eingezeichnete empirische Standardabweichung ist in etwa so groß wie im Falle der Dehnungsrate¹ Im Falle der Rotationsrate ist sie hiermit jedoch kleiner als der Mittelwert dieser Größe. Wird die Zerlegung der Rotationsrate in Longitudinal- und Transversalkomponente betrachtet, so findet sich eine sehr gute Übereinstimmung der Kurvenverläufe. Lediglich in der Beschleunigungsphase zeigen sich etwas größere Werte in der Longitudinalkomponente der Rotationsrate als für die Transversalkomponente.

¹ Weitergehende Analysen der Verteilung der Abweichung zeigen, dass sie eine gewisse Schiefe aufweist [$v(\Omega) \approx 0,86$]. Dies entspricht den Erwartungen, da ein wesentlicher Beitrag zu der Verteilung aus der Verteilung von $|\vec{v}_{\text{rel},\perp}|$ stammt, die als MAXWELL-BOLTZMANN-verteilt anzunehmen ist. Dennoch zeigen empirische Vergleiche, dass der grau schattierte Bereich gut den Bereich der Verteilung markiert, in dem die zentralen 68% der Ereignisse liegen.)

Eine Übereinstimmung der Kurven in dieser Darstellung entspricht einer isotropen Gleichverteilung der Rotationsrate. Erneut sei darauf hingewiesen, dass der Faktor zwei bei den Werten der Transversalkomponente gegenüber der Longitudinalkomponente daher rührt, dass erstere zwei Raumrichtungen abdeckt.

Insgesamt zeigt die hohe Rotationsrate an, dass es eine starke scherartige Bewegung zwischen den Partikeln gibt, also Bewegungen, die abstandserhaltend sind. Die Rotationsrate Ω nimmt insbesondere dort hohe Werte an, wo aufgrund von Beschleunigung und Größen- und Formveränderungen von Nachbarschaften Umordnungen innerhalb von Schalen stattfinden. Dieses Verhalten ähnelt der Umordnung von Partikeln in Clustern [302], bei der ebenfalls eine Bevorzugung von Scherbewegungen festgestellt werden kann.

7.4 Vergleich von Strömungen mit und ohne Hydraulic Jump

Um den Blick auf die mikroskopische Entwicklung in der Staubströmung zu vervollständigen, wird im Folgenden die Abhängigkeit der zuvor geschilderten Phänomene von den Strömungsbedingungen untersucht. In Abb. 7.10 sind zu diesem Zwecke die Auswertungen von charakteristischen Strömungsgrößen für verschiedene Reibungskoeffizienten ($\beta = 50\text{ s}^{-1}$, $\beta = 100\text{ s}^{-1}$ und $\beta = 200\text{ s}^{-1}$) dargestellt. Abhängig von dieser Größe etablieren sich super- und subkritische Strömungen.

Bereits zu Beginn der in diesem Kapitel ausgeführten Betrachtungen wurden in Abb. 7.2 die Geschwindigkeitsverläufe entlang des Toruszentrums für die drei Staubströmungen präsentiert. Charakteristisch für alle drei Tori ist eine gleichmäßige Beschleunigungsphase, der jedoch für die Fälle $\beta = 50\text{ s}^{-1}$ und $\beta = 100\text{ s}^{-1}$ eine sehr drastische Abbremsung folgt, während die Verzögerung im Falle $\beta = 200\text{ s}^{-1}$ weicher verläuft. In Abb. 7.10 (a) korrespondiert dies mit dem Auftreten einer superkritischen Strömung ($Fr > 1$) bei $\beta = 50\text{ s}^{-1}$ und $\beta = 100\text{ s}^{-1}$, wohingegen im dritten Fall ($\beta = 200\text{ s}^{-1}$) die Strömung während des gesamten Umlaufs subkritisch bleibt.

Die mittlere kinetische Temperatur der Staubpartikel entlang des Strömungszentrums ist in Abb. 7.10 (b) dargestellt. In den Fällen der Strömungen mit $\beta = 50\text{ s}^{-1}$ und $\beta = 100\text{ s}^{-1}$ sind ein Anstieg der Temperatur in der beschleunigenden Strömung und ein ausgeprägtes Temperaturmaximum im Bereich des Hydraulic Jumps zu finden. Im Falle der subkritischen Strömung ($\beta = 200\text{ s}^{-1}$) ist nur ein sehr moderater Anstieg der kinetischen Temperatur zu beobachten und im Bereich des Wechsels von Beschleunigung zu Verzögerung tritt keine schlagartige Aufheizung auf.

In Abb. 7.10 (c) ist der Verlauf des Kopplungsparameters Γ eingezeichnet. Mit steigendem EPSTEIN-Koeffizienten β nimmt die Kopplung zu. Darüber hinaus zeigen alle drei Graphen eine systematische Variation: In der Beschleunigungsphase der Strömungen, während Schalen zusammenströmen, nimmt die Kopplung stets ab und erreicht ihr Minimum gerade an der Stelle, an der die Aufspaltung der Stromlinien eintritt [vgl. Abb. 7.2 (b)–(d)]. Im Falle der Tori mit $\beta = 50\text{ s}^{-1}$ und $\beta = 100\text{ s}^{-1}$ koinzidiert dies mit dem Hydraulic Jump. In den Fällen $\beta = 100\text{ s}^{-1}$ und $\beta = 200\text{ s}^{-1}$ folgt dem Minimum unmittelbar ein steiler Anstieg des Kopplungsparameters, während dieser Anstieg bei schwacher Reibung ($\beta = 50\text{ s}^{-1}$) erst verzögert einsetzt und weniger ausgeprägt verläuft.

Die mittlere Elliptizität der Nachbarschaften entlang des Strömungszentrums ist in Abb. 7.10 (d) dargestellt. Auch in diesen Graphen tritt eine strikte Systematik zu Tage:

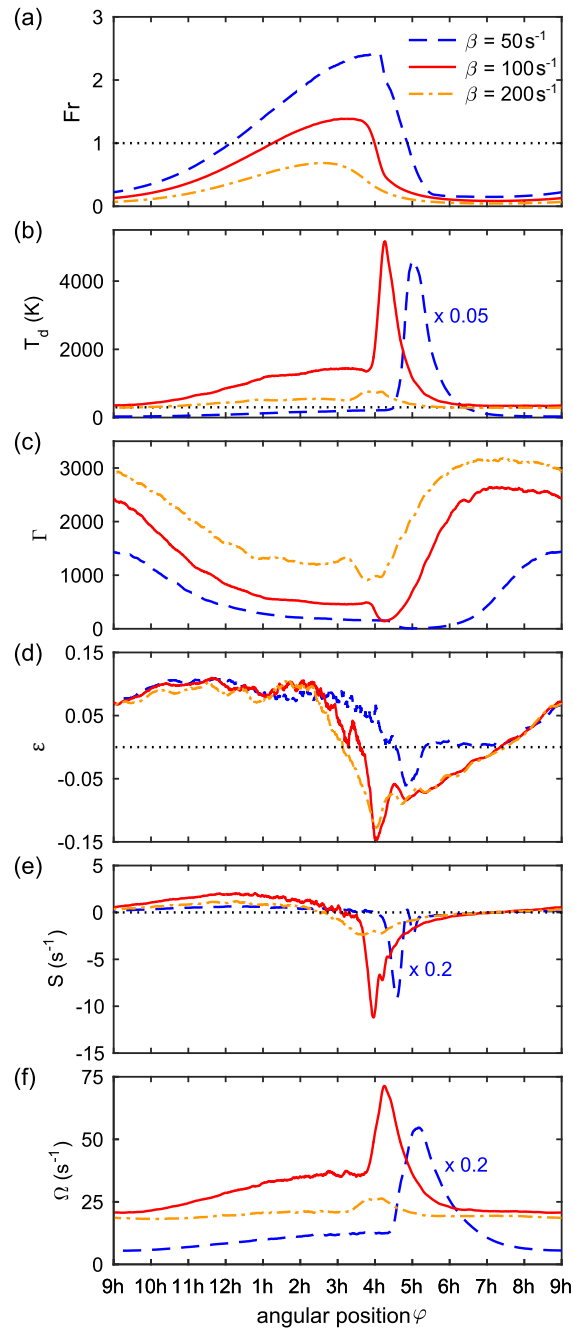


Abbildung 7.10: Vergleich charakteristischer Größen dreier Staubtori mit den Reibungskoeffizienten $\beta = 50 \text{ s}^{-1}$ (blau gestrichelt), $\beta = 100 \text{ s}^{-1}$ (rot durchgezogen) und $\beta = 200 \text{ s}^{-1}$ (gelbe Punkt-Strich-Linie). Die sechs Abbildungen zeigen jeweils die gemittelten Werte entlang des Strömungszentrums von (a) der FROUDE-Zahl, (b) der kinetischen Temperatur des Staubs (im Falle von $\beta = 50 \text{ s}^{-1}$ mit einem Faktor 0,05 skaliert), (c) dem Kopplungsparameter Γ , (d) der Elliptizität ε , (e) der mittleren Dehnungsrate S (im Falle $\beta = 50 \text{ s}^{-1}$ mit einem Faktor 0,2 skaliert) und (f) der mittleren Rotationsrate Ω (für $\beta = 50 \text{ s}^{-1}$ ebenfalls mit 0,2 skaliert). (Grafik nach Ref. [122])

In der Beschleunigungsphase der Staubströmungen zeigen die Nachbarschaften stets eine prolata Verformung, während oblate Nachbarschaften in der Verzögerungsphase anzutreffen sind. Im Falle sehr geringer Reibung mit dem Neutralgas ($\beta = 50\text{s}^{-1}$) ist diese oblate Phase jedoch weniger ausgeprägt. Der Grund hierfür liegt im Verlust der systematischen (kristallartigen) Partikelordnung in dem Bereich, in dem die schnelle Staubströmung auf die langsame Population trifft [vgl. Abb. 7.2 (b)]. An dieser Stelle entsteht ein großer Wirbel, in dem sehr hohe kinetische Temperaturen auftreten [vgl. Abb. 7.10 (b)], so dass der Kopplungsparameter sehr geringe Werte annimmt [vgl. Abb. 7.10 (c)]. Auf diese Weise geht die mikroskopische Ordnung der Nachbarschaften verloren.

Das hohe Maß an Bewegung innerhalb der Nachbarschaften äußert sich auch in der mittleren Dehnungsrate und der mittleren Rotationsrate, die in Abb. 7.10 (e) und (f) dargestellt sind. Die Systematik der drei Kurven entspricht hier jeweils dem Verlauf, der bereits ausführlich für den Fall von $\beta = 100\text{s}^{-1}$ beschrieben wurde, jedoch nehmen die Werte für verkleinerte Reibung enorm zu. In allen Fällen übertrifft die mittlere Rotationsrate die mittlere Dehnungsrate um etwa eine Größenordnung.

7.5 Diskussion der mikrophysikalischen Prozesse im Staubtorus

Die stark gekoppelte inhomogene Strömung ist durch kontinuierliche strukturelle Phasenübergänge und durch die damit einhergehenden Umordnungen auf der mikroskopischen Ebene gekennzeichnet. Aufgrund der starken Kopplung zwischen den Partikeln [vgl. Abb. 7.10 (c)] ergibt sich die Schalenstruktur als bevorzugte kristalline Ordnung. Anders als im Falle der langreichweitigen Ordnung in statischen Kristallen mit statischen Partikelnachbarschaften variieren die Nachbarn im Falle der inhomogenen Strömung. Darüber hinaus ist die Winkelverteilung, unter der das nächste Partikel zu finden ist, sehr breit [vgl. Abb. 7.4 (b)] und zeigt eine systematische Variation mit den makroskopischen Strömungseigenschaften [vgl. Abb. 7.5]. In gewissem Maße ähnelt dieses Verhalten glasartigen Strukturen oder unterkühlten Flüssigkeiten. In diesen Fällen können geordnete Strukturen auf kurzen Zeitskalen beobachtet werden, während das Verhalten im Langzeitmittel eher Eigenschaften von Flüssigkeiten aufweist [303, 304]. Im vorliegenden Fall durchläuft die Strömung kontinuierlich strukturelle Phasenübergänge, so dass die Ordnung auf größeren Zeitskalen stets einer Veränderung unterworfen ist.

Die Schalenbildung in der Strömung ist als Confinement-induzierte Kristallisation zu beschreiben, die sich von außen nach innen bildet. Auf den Schalen selbst ist jedoch während der strukturellen Phasenübergänge und in deren Nähe keine charakteristische kristalline Ordnung mehr zu finden. Bekannt ist ein solcher Systemzustand beispielsweise von dem zweistufigen Schmelzprozess von COULOMB- und YUKAWA-Bällen [305, 306]. Auch hier verliert sich in einem Schmelzprozess zunächst die Ordnung innerhalb der einzelnen Schalen, bevor sich die Schalen auflösen.

In der Beschleunigungsphase des Torus herrscht eine positive mittlere Dehnungsrate vor, die die Nachbarschaften in Strömungsrichtung elongiert. Dies führt dazu, dass die Energiebarriere für transversales Einscheren auf Zwischengitterplätze herabgesetzt wird und Partikel so im Inneren der Strömung zwischen Schalen wechseln können. Auf diesem Wege verschwinden Schalen durch Zusammenströmen im Strömungsquerschnittszentrum und die Querschnittsfläche der Strömung nimmt insgesamt ab. Hierdurch reduziert sich insbesondere der Radius der äußeren Schalen. Durch die Abnahme des Radius

kann auf diesen Schalen die Elongation zwischen den Partikeln in Strömungsrichtung durch eine Umordnung innerhalb der Schalen ausgeglichen werden, so dass hier kaum Schalenwechsel von Partikeln stattfinden. Diese Umordnung führt zu einer starken Umverteilung der Nachbarn [vgl. Abb. 7.7 (b)]. Am Ort des Hydraulic Jumps trifft die schnelle Strömung auf die langsame Staubpopulation und die Staubpartikel werden schlagartig abgebremst. Die große negative Dehnungsrate in Strömungsrichtung führt zu einer starken oblaten Verformung der Nachbarschaften im Innern der Strömung. Die äußeren Schalen werden weitestgehend abgelenkt, ohne Partikel mit anderen Schalen auszutauschen, und umströmen das Hindernis nahezu laminar. Die Partikel im Strömungszentrum ordnen sich um und führen so zur Ausbildung weiterer Schalen im Torusinneren. Dieser Prozess setzt sich fort, bis die Strömungsgeschwindigkeit ihr Minimum erreicht hat.

Die Variation des Volumens der VORONOI-Zellen und damit der Staubdichte im Torus zeigt, dass das YUKAWA-System nicht absolut inkompressibel ist. Die Variation der Dichte erfolgt jedoch auf der Zeitskala der Partikelumläufe, da sie insbesondere vom Füllgrad der Falle und damit vom Strömungsquerschnitt abhängt. Im Verhältnis hierzu verlaufen die Umordnungsprozesse auf kurzen Längen- und Zeitskalen.

Aufgrund der scheinbaren Inkompressibilität in der Dynamik des Staubtorus kann die Strömung hydrodynamisch beschrieben werden. Die Ursache der Inkompressibilität ist in der Systematik der Partikelumordnungen zu finden, die eine Bevorzugung von Scherbewegungen gegenüber Kompressionsbewegungen aufweisen. Die abstands- – und damit volumenerhaltenden – Scherbewegungen sind durch die hohe Rotationsrate charakterisiert. Die abstandsverändernden – und damit Volumenarbeit verrichtenden – Bewegungsanteile sind in der Dehnungsrate zu finden. Ihre hohe Standardabweichung zeigt die gleichzeitige Annäherung und Entfernung von Partikeln einer Nachbarschaft sowie das Hinzukommen und Verlassen von Nachbarpartikeln im Rahmen der Umordnungsprozesse. Der kleine Mittelwert dieser Größe zeigt hingegen, dass sich diese Effekte kompensieren und kaum Volumenarbeit verrichtet wird. Die Umordnung ist somit hauptsächlich auf Scherbewegungen zurückzuführen, die energetisch günstig ablaufen.

In einer vollständig subkritischen Strömung verursachen Beschleunigung und Verzögerung ebenfalls durch eine positive/negative Dehnungsrate eine Verformung der Nachbarschaften, die dem Falle des Torus mit Hydraulic Jump ähnelt. Insgesamt bleiben die mittlere Dehnungs- und Rotationsrate in diesem Fall jedoch klein. Dies bestätigt den Eindruck, den auch die Stromlinienbilder vermitteln, dass die Umordnung der Partikel sehr ruhig abläuft und jegliche Störungen zügig durch die hohe Reibung gedämpft werden.

Im Falle der moderaten Dämpfung durch das Neutralgas tritt ein Hydraulic Jump auf und bildet genau den Übergang zwischen Zugspannung auf die Nachbarschaften davor (im Beschleunigungsbereich) und Druckspannung dahinter (im Verzögerungsbereich). Ist die Reibung noch geringer, treten weitere Effekte auf, welche die in diesem Kapitel beschriebenen Prozesse überlagern und Berücksichtigung finden müssen, wie zum Beispiel die Ausbildung eines makroskopischen Wirbels.

Insgesamt zeigt die inhomogene Staubströmung in ihren Umordnungen der Partikel Ähnlichkeiten mit der Umordnung von Partikeln in statisch eingeschlossenen YUKAWA-Systemen. Genau wie dort weist im vorliegenden System die Bevorzugung von Scherbewegungen auf die mikroskopische Umordnung der Partikel entlang von Trajektorien minimaler potentieller Energie hin. Über den Kontext der staubigen Plasmen hinausgehend machen die analysierten Verformungen der Nachbarschaften in gewisser Weise die natürliche mikroskopische Reaktion verformbarer Materie auf äußere mechanische Spannungen sichtbar.

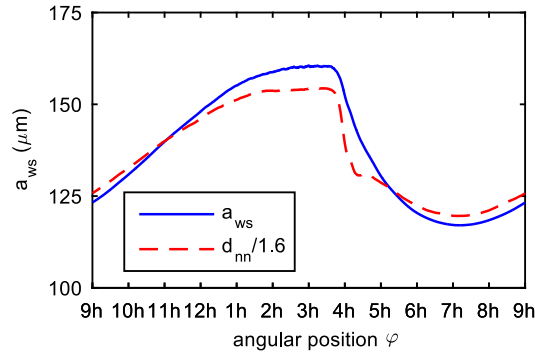


Abbildung 7.11: Vergleich des tatsächlichen WIGNER-SEITZ-Radius für einen mustergültigen Torus (blau durchgezogen) über der Winkelposition mit dem Näherungswert nach OTT *et al.* [294] (rot gestrichelt). Es zeigen sich lediglich kleine Abweichungen. Die zugrunde liegenden Daten stammen aus einer Simulation mit $N = 8192$ Partikeln, einem Antrieb von $F_1 = 0,8 g$ und einem Reibungskoeffizienten von $\beta = 100 s^{-1}$. Die sonstigen Parameter entsprechen denen aus Tab. 7.1.

7.6 Ergänzung: Überprüfung der Anwendbarkeit der Näherung des WIGNER-SEITZ-Radius im Falle inhomogener Staubströmungen

Aus den Simulationsdaten lässt sich mit Hilfe der VORONOI-Analyse der WIGNER-SEITZ-Radius a_{ws} jeder geschlossenen Nachbarschaftszelle exakt bestimmen. In der Praxis ist dieses Verfahren mit einem hohen Rechenaufwand verbunden und daher nicht in jedem Fall praktikabel. Eine effiziente Näherung kann entsprechend einer Arbeit von OTT *et al.* [294] in homogenen Staubwolken mit Hilfe des Abstandes nächster Nachbarn d_{NN} geschehen. Diese Näherung wird auch in der vorliegenden Arbeit verwendet, beispielsweise in Abschn. 7.2. Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass dieses Verfahren auch für ellipsoid verformte Nachbarschaften, wie sie in der inhomogenen Staubströmung vorkommen (vgl. Abschn. 7.3), sinnvolle Werte liefern kann.

Hierzu betrachten wir erneut den in diesem Kapitel ausführlich analysierten Torus bei einem EPSTEIN-Koeffizienten von $\beta = 100 s^{-1}$. Abbildung 7.11 zeigt den exakten WIGNER-SEITZ-Radius, der aus der VORONOI-Analyse gewonnen wurde, als blaue durchgezogene Linie. Die Näherung über $a_{ws} \approx d_{NN}/1,6$ ist als rote, gestrichelte Linie eingezeichnet. Der Vergleich der beiden Graphen weist trotz der unterschiedlichen Ermittlungsmethoden nur verhältnismäßig geringe Unterschiede in Systematik und Betrag auf. Vergrößerung und Verkleinerung des Radius verlaufen phasengleich mit ähnlichen Krümmungen. Die Ungenauigkeiten in der Näherung sind vor allem der Deformation der Nachbarschaften zuzuschreiben, die unberücksichtigt bleibt, sowie der Inhomogenität der untersuchten Staubwolke, die eigentlich einen ortsabhängigen Divisor in der Abschätzung des Radius verlangt.

Die gute Übereinstimmung der Absolutwerte von exakter Bestimmung und Näherung des WIGNER-SEITZ-Radius legitimiert dennoch die Nutzung dieser Abschätzung in der vorliegenden Arbeit.

7.7 Exkurs: Alternative Verfahren zur Ermittlung der Partikelnachbarschaften

Zur detaillierten Untersuchung der Mikrophysik der inhomogenen Staubströmung ist die genaue Kenntnis der Partikelnachbarschaften notwendig. Im vorliegenden Fall wurde zur exakten Bestimmung der Nachbarpartikel die DELAUNAY-Triangulation verwendet, die einen hohen Rechenaufwand mit sich bringt. Eine weitere, im Bereich der Thermodynamik etablierte Möglichkeit zur Bestimmung der Koordinationszahl von Teilchen – und damit auch zur Bestimmung von Nachbarn –, ist das Verfahren einer Fangkugel mit festem Radius. Diese Technik wird beispielsweise im Buch von ALLEN und TILDESLEY [237] vorgeschlagen. Bei diesem Verfahren werden einem betrachteten Teilchen alle Teilchen als Nachbar zugeordnet, die ihm näher als ein kritischer Radius r_c sind. Die Wahl dieses Radius ist entsprechend bedeutsam für die Qualität der Ergebnisse – zu kleine Radien unterschätzen die Anzahl der Nachbarn, zu große Radien schließen Partikel ein, die nicht in die erste Koordinationssphäre gehören.

Ein möglicher Ansatz, den kritischen Radius festzulegen, ist eine Skalierung über den mittleren Abstand von NN-Paaren \bar{d}_{NN} . In diesem Zusammenhang wird häufig $r_c = 1,3 \bar{d}_{NN}$ verwendet, da dieser Wert bei einer dichten Kugelpackung zwischen den nächsten Nachbarn und den übernächsten Nachbarn liegt, die mathematisch bei $\bar{d}_{N2N} = \sqrt{2} \bar{d}_{NN}$ erwartet werden. In einer kühlen Flüssigkeit liegt der Erwartungswert der Koordinationszahl bei dieser Methode typischerweise bei zwölf Nachbarn und reduziert sich bei thermodynamischer Aufheizung, da Partikel, die sich voneinander entfernen, die gegenseitige Nachbarschaft verlassen.

Eine weitere Methode zur Wahl des kritischen Radius nutzt die Paarkorrelationsfunktion. In diesem Fall wird der Abstand des ersten Minimums der Funktion als Fangkugelradius angesetzt. Um die Berechnung dieser Funktion zu umgehen, kann auch dieser Abstand über den Abstand zum nächsten Nachbarn abgeschätzt werden. Geeignete Faktoren können beispielsweise aus den Arbeiten von OTT *et al.* entnommen werden [294]. Im vorliegenden Fall würde nach dieser Methode der Fangkugelradius auf etwa $r_c = 1,5 \bar{d}_{NN}$ festgelegt, mit der Folge, dass ein Teilchen dann typischerweise mehr als zwölf Nachbarn besäße.

Beiden genannten Verfahren mit Fangkugel ist gemein, dass sie nur für isotrope Systeme sinnvolle Ergebnisse liefern. Die mikroskopische Betrachtung der inhomogenen Staubströmung zeigt jedoch, dass dies im vorliegenden System nicht gegeben ist – es kommt zur ellipsoiden Verformung der Nachbarschaften. Letzteres kann dazu führen, dass Partikel die Fangkugel in Richtung der Elongation verlassen und Partikel aus der Transversalrichtung hinzukommen. Dies verfälscht die Analyse stark und führt zur Identifikation von Partikelnachbarschaften, die nicht den tatsächlichen Gegebenheiten entsprechen.

Eine Vereinfachung der Betrachtungen auf diese Weise ist für eine exakte Analyse der Mikrophysik granularer Systeme, die durch äußere Kräfte eine signifikante Verformung erfahren, also nicht sinnvoll. In diesem Falle ist die DELAUNAY-Triangulation zu bevorzugen.

8 | Einfluss der Einschlussgeometrie auf Strömungseigenschaften

Im vorangegangenen Kapitel wurde die Mikrophysik der Staubströmung eingehend untersucht und mittels verschiedener Kenngrößen charakterisiert. Im Folgenden soll der Blick noch einmal auf die experimentellen Untersuchungen am Staubtorus aus Kap. 5 gelenkt werden. Dort wurde ausgenutzt, dass eine starke Verformung des Torus es erlaubt, zusätzliche Heizeffekte zu unterbinden. In diesem Abschnitt soll nun untersucht werden, ob elliptisch verformte Staubtori ein Analogon zu Staubströmungen mit kreisrunden Strömungsquerschnitten bilden – sowohl makrophysikalisch als auch mikrophysikalisch. Sofern es möglich ist, auf diesem Wege Strömungen verschiedener Querschnitte in Klassen zusammenzufassen, wäre die gesamte Klasse über die Analyse einer einzelnen Strömung charakterisiert und Ergebnisse wären zwischen kreisrunden und elliptisch verformten Tori einer Klasse wechselseitig übertragbar. Konkret: Die Ergebnisse, die im Laborexperiment für verformte Tori gefunden wurden, gelten bei geeigneten Parametern auch für Tori mit kreisrundem Strömungsquerschnitt, und die Simulationsergebnisse der vorangegangenen Kapitel sind auf verformte Situationen, wie sie im Experiment vorkommen können, übertragbar.

Die Frage nach Form und Verhalten stark gekoppelter Partikelsysteme in Abhängigkeit eines anisotropen Einschlusses ist seit vielen Jahren Forschungsgegenstand, sowohl im Rahmen von Simulationen als auch in Laborexperimenten. Beginnend mit statischen zweidimensionalen COULOMB-Clustern [307] wurden die Untersuchungen zunächst auf YUKAWA-Cluster übertragen [308–314] und auch auf dreidimensionale Cluster erweitert [315–317]. Zu Strömungen in anisotropen Fallen sind bisher jedoch keine Ergebnisse veröffentlicht.

Zur Untersuchung des Einflusses einer Verformung des Einschlusses auf die Staubströmung wurde der Simulationsalgorithmus dahingehend geändert, dass der paraboloider Einschluss des Staubes in radialer und axialer Richtung nicht mehr die gleiche Härte besitzt. In Analogie zu den experimentellen Befunden wurde die Variation bevorzugt so gewählt, dass sich die axiale Richtung im Verhältnis zur radialen Richtung aufweicht. Hierbei ist zu beachten, dass bereits im Falle des Torus mit kreisrunden Strömungsquerschnitten eine Variation der Fallenfrequenz einen großen Einfluss auf die Strömungscharakteristika besitzt. Im Extremfall eines sehr harten Confinements, also einer sehr stark einschließenden Falle, wird der Staub derart zusammengepresst, dass der komplette Torus auch ohne Antrieb gegen die Gravitation gefüllt wird. Bei einem sehr „weichen“ Einschluss hingegen sammelt sich der Staub ohne Antrieb in der Sohle der Falle. Doch auch verhältnismäßig moderate Variationen des Einschlusses besitzen bereits einen signifikanten Einfluss auf die Strömung.

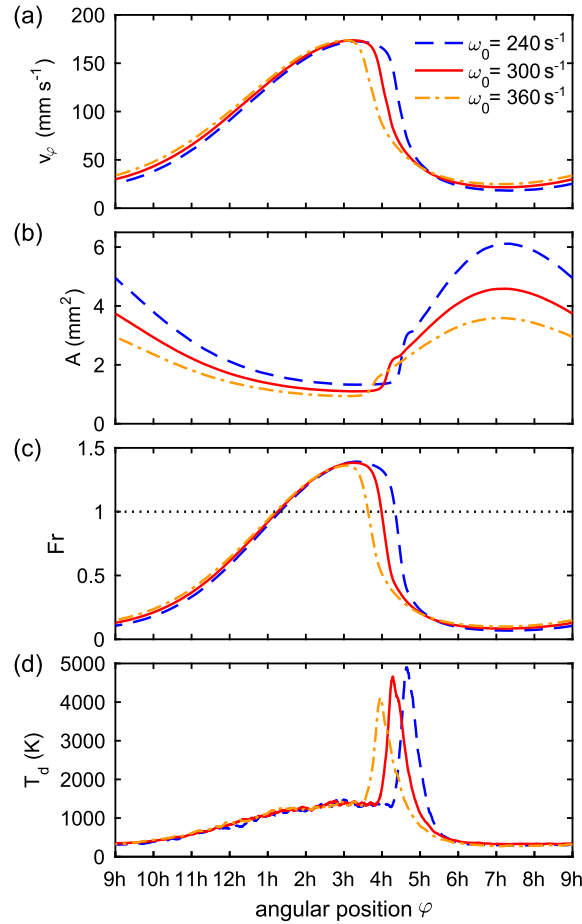


Abbildung 8.1: Einfluss einer Variation der harmonischen Fallenfrequenz ω_0 auf makrophysikalische Strömungsgrößen (blau gestrichelt: $\omega_0 = 240 \text{ s}^{-1}$, rot durchgezogen: $\omega_0 = 300 \text{ s}^{-1}$ und orange Punkt-Strich: $\omega_0 = 360 \text{ s}^{-1}$). Gezeigt sind in (a) die mittlere Toroidalgeschwindigkeit, in (b) die Querschnittsfläche der Strömung, in (c) die FROUDE-Zahl nach Gleichung (6.31) und in (d) die kinetische Temperatur der Staubpartikel. Alle Kenngrößen weisen auf das Auftreten eines Hydraulic Jumps hin – der Ort, an dem dieser auftritt, verschiebt sich jedoch mit der Variation der Fallenfrequenz.

Makrophysikalische Kenngrößen von drei Tori mit kreisrunden Strömungsquerschnitten und unterschiedlicher Fallenfrequenz ω_0 sind in Abb. 8.1 zusammengestellt. Ausgangspunkt dieser Betrachtung ist der im vorangegangenen Kap. 7 ausführlich diskutierte Torus bei Simulationsparametern entsprechend Tab. 7.1 und einem EPSTEIN-Koeffizienten von $\beta = 100 \text{ s}^{-1}$. Die Kenngrößen zu diesem Torus, dessen Fallenfrequenz $\omega_0 = 300 \text{ s}^{-1}$ beträgt, sind in den Abbildungen als roter, durchgezogener Graph eingezeichnet. Ergänzend abgebildet sind die Daten für einen Torus, dessen Fallenfrequenz im Verhältnis hierzu um 20% auf $\omega_0 = 240 \text{ s}^{-1}$ reduziert wurde (blauer, gestrichelter Graph), und die Ergebnisse einer Simulation mit um 20% auf $\omega_0 = 360 \text{ s}^{-1}$ erhöhter Fallenfrequenz (oranger Punkt-Strich Graph). In allen vier dargestellten Größen zeigen sich wesentliche Unterschiede:

Die Toroidalgeschwindigkeit [Abb. 8.1 (a)] zeigt über weite Strecken die Tendenz: Je härter das Confinement, desto höher die Strömungsgeschwindigkeit. Darüber hinaus setzt die Verzögerung der Strömung früher ein. Hiermit geht in Abb. 8.1 (b) die frühere Aufweitung des Strömungsquerschnittes einher. Außerdem zeigt sich hier, dass der Strömungsquerschnitt empfindlich von der Einschluss Härte abhängt: Je weicher das Confinement, desto größer die Querschnittsfläche. Die FROUDE-Zahl [Abb. 8.1 (c)] zeigt für alle drei analysierten Tori einen kritischen Übergang an, jedoch durchschreiten die Graphen die kritische Bedingung jeweils mit ungefähr $\Delta\varphi = 0,5$ h Abstand zueinander. Die kinetische Temperatur [Abb. 8.1 (d)] erreicht jeweils im Bereich des Hydraulic Jumps ihr Maximum, ihr Maximalwert sinkt jedoch mit steigender Fallenfrequenz.

Eine weitere markante Größe der Strömungen ist der Teilchenstrom I , der angibt, wie viele Teilchen N pro Zeiteinheit einen festen Winkel φ_0 überschreiten: $I = (dN/dt) |_{\varphi_0}$. Diese Größe ist aufgrund der geschlossenen Strömungsbahn bei fester Partikelzahl in einem Torus mit stationärem Strömungsfeld konstant. Für die drei hier vorgestellten Tori ergeben sich die Werte: $I_{240} = 9930 \text{ s}^{-1}$, $I_{300} = 11130 \text{ s}^{-1}$ und $I_{360} = 12130 \text{ s}^{-1}$. Der Teilchenstrom des Torus mit „aufgeweichtem“ Confinement I_{240} liegt also etwa 10% unter dem Wert, der Teilchenstrom des Torus mit „verhärtetem“ Confinement I_{360} etwa 10% über dem Wert des ursprünglichen Torus mit einer Fallenfrequenz von $\omega_0 = 300 \text{ s}^{-1}$.

Diese kurze Betrachtung verdeutlicht, dass die gezeigten Tori in verschiedene „Strömungsklassen“ gehören. Die Variation der Fallenfrequenz beeinflusst das makrophysikalische Strömungsverhalten demzufolge maßgeblich und verändert insbesondere den Teilchenstrom und die Strömungsquerschnittsfläche. Um bei der Analyse des Einflusses der Fallenform geeignete Parametervariationen zu wählen, sollen daher zunächst einige Überlegungen vorangestellt werden.

8.1 Vorüberlegungen zur Wahl der Einschlussgeometrie

Ziel dieser Vorüberlegung ist die Definition von Torusklassen, die Partikelströmungen verschiedener Querschnittsformen zusammenfassen. Intuitiv ist davon auszugehen, dass die Vergleichbarkeit von Staubtoris dann besonders groß ist, wenn die zentralen Parameter für die Kopplung der Partikel untereinander (Partikelzahl, Partikelladung, Abschirmlänge und großer Torusradius) sowie die Parameter, welche die toroidale Dynamik bestimmen (EPSTEIN-Koeffizient und Antriebskraft), gleich sind und wenn darüber hinaus die Querschnittsfläche im Strömungsverlauf stets ähnlich ist. Hierfür erscheinen zunächst zwei Ansätze bei der Wahl des Confinements angemessen:

1. Die Wahl einer Falle, die bei gleicher Querschnittsfläche, das bedeutet gleichem „Füllstand“, dasselbe Oberflächenpotential besitzt.
2. Die Wahl einer Falle, bei der bei gleicher Querschnittsfläche der gleiche Kraftbetrag auf die Partikel der Oberfläche wirkt.

Zunächst sollen die Konsequenzen betrachtet werden, die sich aus der ersten Forderung ergeben.

Für das Potential $\Phi \neq 0$ im kreisrunden Confinement gilt bei einer Fallenfrequenz von ω_0

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega_0^2 a^2, \quad (8.1)$$

mit dem Abstand a zur Ursprungsachse des Einschlusspotentials. In dem Koordinatensystem aus Radialrichtung \vec{e}_r und Axialrichtung \vec{e}_z gilt dann $a = \sqrt{r^2 + z^2}$ mit den Beträgen der jeweiligen Vektorkomponenten r und z . Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 z^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{\omega_0^2}{2\Phi} r^2 + \frac{\omega_0^2}{2\Phi} z^2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Für konstantes Potential Φ_0 beschreibt diese Gleichung einen Kreis in Parameterdarstellung mit dem Radius: $a = \sqrt{2\Phi_0/\omega_0^2}$. Die zu diesem Potential gehörige Kreisfläche lautet damit

$$A_K(\Phi_0) = \pi \frac{2\Phi_0}{\omega_0^2}. \quad (8.3)$$

Im Falle eines Confinements mit der Fallenfrequenz ω_r in radialer Richtung und ω_z in axialer Richtung lautet die Gleichung für das Potential Φ

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}\omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2}\omega_z^2 z^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{\omega_r^2}{2\Phi} r^2 + \frac{\omega_z^2}{2\Phi} z^2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Diese Gleichung beschreibt bei konstantem Potential Φ_0 eine Ellipse in Parameterdarstellung mit der einen Halbachse $a_r = \sqrt{2\Phi_0/\omega_r^2}$ und der zweiten Halbachse $b_z = \sqrt{2\Phi_0/\omega_z^2}$. Die Fläche dieser Ellipse beträgt dann

$$\begin{aligned} A_E(\Phi_0) &= \pi \sqrt{\frac{2\Phi_0}{\omega_r^2}} \sqrt{\frac{2\Phi_0}{\omega_z^2}} \\ &= \pi \frac{2\Phi_0}{\omega_r \omega_z}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Weiterhin ist die Exzentrizität ϵ der Ellipse zu erkennen:

$$\epsilon_{\Phi,E} = \frac{\sqrt{b_z^2 - a_r^2}}{b_z} = 1 - \frac{\omega_z^2}{\omega_r^2}. \quad (8.6)$$

Um nun eine Vergleichbarkeit der Situationen bei verformten Strömungsquerschnitten herstellen zu können, fließt die Forderung ein, dass die Strömung mit symmetrischem Confinement gleich große Äquipotentialflächen besitzen soll wie die Strömung im asymmetrischen Confinement: $A_K(\Phi_0) = A_E(\Phi_0)$. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\omega_0^2 = \omega_r \omega_z. \quad (8.7)$$

Es bleibt festzuhalten: Sofern das Produkt aus radialer und axialer Einschlussfrequenz konstant gehalten wird, besitzen Äquipotentialflächen stets dieselbe Größe und sind ellipsoförmig mit einer Exzentrizität von $\epsilon_\Phi = 1 - \omega_z^2/\omega_r^2$.

Nun wird die zweite Forderung betrachtet. Entsprechend dieser Bedingung sollen bei gleicher Strömungsquerschnittsfläche gleiche Kraftbeträge auf Partikel an der Oberfläche wirken. Für den Fall des symmetrischen Confinements gilt

$$|F_K| = m\omega_0^2|a| = m\omega_0^2\sqrt{r^2 + z^2} . \quad (8.8)$$

Quadrieren und Umstellen liefert nun

$$1 = \frac{m^2\omega_0^4}{|F_K|^2}r^2 + \frac{m^2\omega_0^4}{|F_K|^2}z^2 . \quad (8.9)$$

Auch diese Gleichung beschreibt für konstanten Kraftbetrag $|F_0|$ Kreise, diesmal mit Radien $a = |F_0|/(m\omega_0^2)$. Für den Fall unterschiedlicher Frequenzen ω_r in radialer Richtung und ω_z in axialer Richtung gilt

$$|F_E| = \sqrt{(m\omega_r^2r)^2 + (m\omega_z^2z)^2} . \quad (8.10)$$

Quadrieren und Umstellen liefert in diesem Fall

$$1 = \frac{m^2\omega_r^4}{|F_E|^2}r^2 + \frac{m^2\omega_z^4}{|F_E|^2}z^2 . \quad (8.11)$$

Wie im Falle des konstanten Potentials beschreibt diese Gleichung für konstante Kraftbeträge $|F_0|$ Ellipsen, diesmal jedoch mit der ersten Halbachse $a_r = |F_0|/(m\omega_r^2)$ und der zweiten Halbachse $b_z = |F_0|/(m\omega_z^2)$. Die Exzentrizität dieser Ellipse beträgt nun, anders als zuvor,

$$\epsilon_{F,E} = 1 - \frac{\omega_z^4}{\omega_r^4} . \quad (8.12)$$

Erneut wird gefordert, dass für einen gleichen Kraftbetrag $|F_0|$ die eingeschlossenen Flächen von Kreis und Ellipse identisch sein sollen: $A_K(|F_0|) = A_E(|F_0|)$. Dies liefert

$$\begin{aligned} \pi \frac{|F_0|^2}{m^2\omega_0^4} &= \pi \frac{|F_0|}{m\omega_r^2} \frac{|F_0|}{m\omega_z^2} \\ \Longleftrightarrow \quad \omega_0^2 &= \omega_r\omega_z \end{aligned} \quad (8.13)$$

Es stellt sich heraus: Die Forderung nach gleichen Äquipotentialflächen und nach gleichen Äquikraftbetragsflächen führt beide Male zu dem gleichen Ergebnis bezüglich der Wahl der Fallenfrequenzen. Das Confinement ist demnach in der Art zu variieren, dass das Produkt der Frequenzen in radialer und axialer Richtung konstant bleibt und somit stets dem Quadrat der zugehörigen Frequenz für einen kreisrunden Strömungsquerschnitt entspricht. Anders als im kreisrunden Fall besitzen im elliptisch verformten Torus Äquikraftbetragsflächen und Äquipotentialflächen jedoch unterschiedliche Formen.

Tabelle 8.1: Fallenfrequenzen zur Untersuchung elliptischer Verformung

ω_r/ω_z	$\omega_r(\text{s}^{-1})$	$\omega_z(\text{s}^{-1})$
1:1	300	300
3:2	367	245
3:1	520	173
6:1	738	122

8.2 Simulationen zur Variation der Einschlussgeometrie – makrophysikalische Größen

Um einen Überblick über die Entwicklung von leichter bis zu starker elliptischer Verformung zu geben, werden die in Tab. 8.1 zusammengestellten Confinementparameter gewählt. Die weiteren Simulationsparameter entsprechen denen aus Tab. 7.1, die bereits bei der Analyse der Mikrophysik zum Einsatz gekommen sind bei einem EPSTEIN-Koeffizienten von $\beta = 100 \text{ s}^{-1}$. Für die Auswertungen wurden erneut 200 000 Zeitschritte der Simulation durchgeführt, nachdem ein stationäres Strömungsfeld etabliert war. Anschließend wurde lediglich jeder 50. Schritt in die Auswertung aufgenommen, um Korrelationseffekte in den Auswertungen zu vermeiden.

In Abb. 8.2 sind repräsentative Strömungsquerschnitte der vier Tori aus dem Bereich um ca. 7:00 h dargestellt. In allen Tori zeigt sich eine Anordnung der Partikel auf festen Schalen, wobei diese Schalen mit fortschreitender Verformung immer mehr in zweidimensionale Schichten übergehen. Mit dieser Verformung geht einher, dass sich die Krümmung der Einhüllenden an den Enden der Querschnittsfläche in axialer Richtung immer weiter vergrößert und schließlich einen strukturellen Übergang von einer „Rundung“ hin zu einer „Spitze“ vollführt. Ein weiteres Merkmal der stark verformten Staubtoriquerschnitte liegt darin, dass es Bereiche gibt, in denen die Schichten nicht strikt getrennt sind. In diesen Systemen nimmt die Zahl der Schichten vom Zentrum her in axialer Richtung ab. Die Übergänge, an denen sich die Zahl der Schichten ändert, sind nicht diskret, sondern ähneln dem „Zusammenströmen“ bei den dynamischen Übergängen in der Beschleunigungsphase der inhomogenen Staubströmung.

Insgesamt weisen die hier gefundenen Strömungsquerschnitte sowohl in ihrer Form als auch in der Systematik eine hohe Ähnlichkeit mit statischen, zweidimensionalen Systemen in anisotropen Confinements auf, wie sie beispielsweise in [308] präsentiert werden. Auch Ergebnisse anisotrop eingeschlossener, dreidimensionaler Systeme zeigen in zentralen Schnitten eine gute Übereinstimmung mit den hier auftretenden Strukturen [315]. Bemerkenswert ist jedoch, dass die Oberflächen der Strömungsquerschnitte in ihrer Form – außer im Falle des kreisrunden Confinements – weder Äquikraftbetragsflächen noch Äquipotentialflächen entsprechen.

Es sei außerdem angemerkt: Im Bereich von etwa 12:00 h bis ca. 4:30 h strömt der Torus mit einem Fallenfrequenzverhältnis von 6:1 in nur noch zwei Schichten. In den folgenden Auswertungen werden – analog zum vorangegangenen Vorgehen – zum Großteil Daten aus dem Strömungszentrum erhoben. Da es in diesem Fall keine „inneren“ Partikel gibt, sondern ausschließlich Partikel, die zu einer äußeren Schale gehören, ist hier bei der Auswertung mit verfälschenden Effekten zu rechnen.

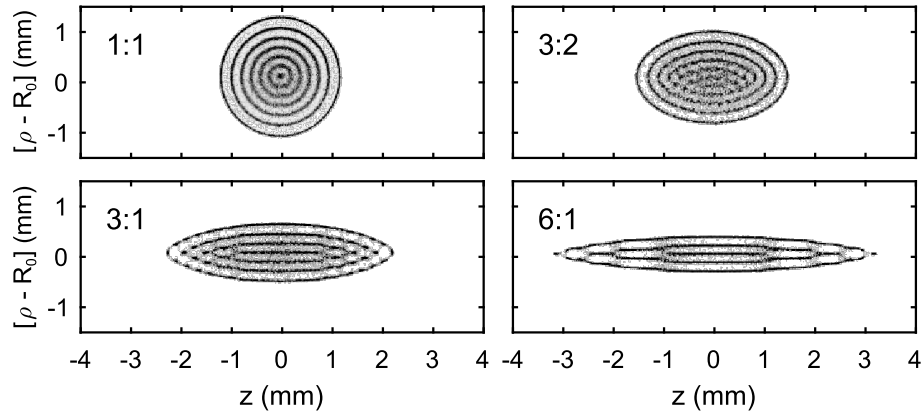


Abbildung 8.2: Dargestellt sind die mittleren Strömungsquerschnitte für vier verschiedene Einschlussgeometrien. Die Schnitte stammen in allen Fällen aus dem Bereich um 7:00 h, in dem die Strömungsgeschwindigkeit nahe ihrem Minimum ist. Das Verhältnis der Fallenfrequenzen $\omega_r : \omega_z$ ist in den jeweiligen Abbildungen angegeben. In allen Querschnitten zeigt sich eine systematische Anordnung der Partikel.

Die Auswertungen makroskopischer Größen der vier Staubströmungen sind in Abb. 8.3 zusammengestellt. Abbildung (a) zeigt den Verlauf der Toroidalgeschwindigkeit im Strömungszentrum. In diesem Falle sind die vier eingezeichneten Kurven nahezu deckungsgleich. Bezüglich Beschleunigung und Abbremsung verhalten sich die Tori bei der gewählten Confinementvariation nahezu identisch. Darüber hinaus unterscheidet sich der absolute Teilchenstrom zwischen den Tori in diesem Fall um maximal 0,5%. Er beträgt im Einzelnen: $I_{1:1} = 11130 \text{ s}^{-1}$, $I_{2:3} = 11160 \text{ s}^{-1}$, $I_{1:3} = 11180 \text{ s}^{-1}$ und $I_{1:6} = 11160 \text{ s}^{-1}$.

Abbildung 8.3 (b) zeigt die Querschnittsfläche A der Strömungen. Die Graphen zeigen in ihren Verläufen sehr große Ähnlichkeiten: Stets nimmt der Querschnitt in der Beschleunigungsphase ab, es kommt zu einer schlagartigen Aufweitung um einen Faktor größer als zwei bei 4:00 h und dann zu einer gleichmäßigen Zunahme der Querschnittsfläche im Verzögerungsbereich. Es fällt jedoch auf, dass es einen Offset zwischen den Kurven gibt, welcher der Systematik „Je stärker die Verformung, desto kleiner die Querschnittsfläche“ folgt. Dies ist zunächst überraschend, da der nahezu identische Verlauf der Geschwindigkeiten und die Konstanz des Teilchenstroms bei einem inkompressiblen Fluid zunächst gleiche Querschnittsflächen für die Strömung erwarten lassen¹.

Eine Ursache dieses Verhaltens kann in der Art der Bemessung der Flächen gefunden werden. Als Maß der Querschnittsfläche wird die konvexe Hülle der Strömungsquerschnitte gewählt. Bereits bei der Analyse des Hydraulic Jumps in Abschn. 6.3 wurde angedeutet, dass auch andere Maße in Frage kommen, jedoch das gewählte Maß den Vorteil der Eindeutigkeit besitzt und tatsächlich denjenigen Ort als Oberfläche definiert, an dem das Confinement eine Kraftwirkung auf die Partikel der äußeren Schale ausübt. Das Problem, das hier bei der Abnahme der Anzahl an Schichten auftritt, kann leicht anhand eines Beispiels visualisiert werden:

¹Für den Teilchenstrom gilt: $I = jA = n_d v_\varphi A = \text{const.}$, mit der Teilchenstromdichte j und der Teilchendichte n_d . Für zwei verschiedene Tori gleichen Teilchenstroms gilt dann: $I_1 = I_2 \Leftrightarrow n_{d,1} v_\varphi A_1 = n_{d,2} v_\varphi A_2 \Leftrightarrow n_1 A_1 = n_2 A_2$. Wird die Teilchendichte n_d nun als konstant angenommen, so würde für die unterschiedlichen Confinements auch $A_1 = A_2$ gelten.

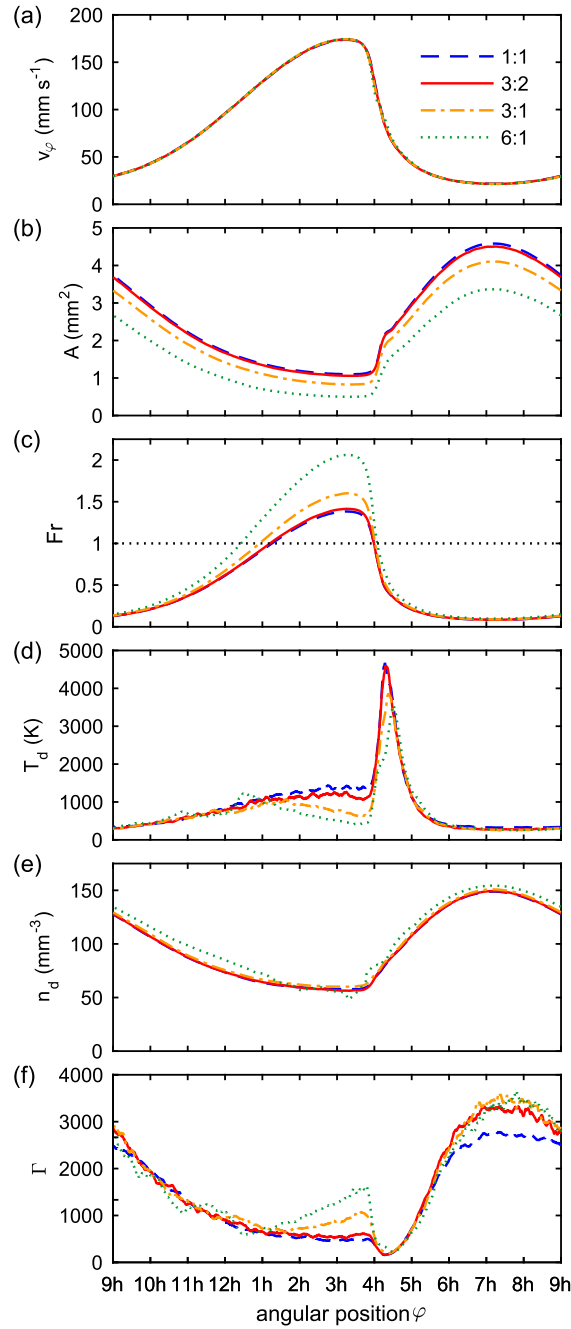


Abbildung 8.3: Dargestellt sind charakteristische Strömungsgrößen für vier verschiedene Confinement-Geometrien. In der Legende ist das Verhältnis aus radialer und axialer Einschlussfrequenz gegeben (blau gestrichelt: 1:1, rot durchgezogen: 3:2, orange Punkt-Strich: 3:1, grün gepunktet: 6:1). Das Produkt beider Frequenzen ist konstant gehalten. (a) Verlauf der mittleren Strömungsgeschwindigkeit, (b) Fläche der Strömungsquerschnitte im Verlauf, (c) FROUDE-Zahl, bzw. FROUDE-Zahl-Äquivalent, (d) kinetische Staubtemperatur (die Abkühlung in der Beschleunigungsphase bei stark verformten Tori kann auf Oberflächeneffekte zurückgeführt werden), (e) Staumdichte im Strömungsverlauf und (f) Kopplungsparameter Γ .

Im Extremfall der elliptischen Verformung ($\omega_r \rightarrow \infty$ und $\omega_z \rightarrow 0$) wird der Staub in nur noch einer Lage strömen und die Staubströmung tatsächlich einen Zylindermantel darstellen. Die Strömungsquerschnitte wären in diesem Falle Strecken der Länge $L(\varphi)$, deren Flächenmaß Null ist¹.

Eine weitere Ursache, die insbesondere für den Fall des stark verformten Confinements von Bedeutung sein kann, liegt in der kristallinen Struktur und damit in der Dichte der Strömungen. Der Übergang einer Schalen- in eine Schichtstruktur (vgl. Abb. 8.2) ist ein eindeutiges Zeichen für einen strukturellen Übergang. Aus statischen Systemen ist bekannt, dass die bevorzugten Kristallstrukturen stark von der Fallenform abhängen und Verformungen strukturelle Übergänge mit sich bringen können, die die Dichte beeinflussen [279, 315]. Eine Staubströmung gleicher Geschwindigkeit und erhöhter Dichte hätte bei gleichem Volumenstrom einen geringeren Strömungsquerschnitt.

Dieser Aspekt wird im Folgenden bei der Betrachtung von Abb. 8.3 (e) noch einmal ausführlicher aufgegriffen. Die beiden Effekte zusammengekommen bedingen den Offset zwischen den Graphen. Dennoch ist die gewählte Bemessungsmethode der Strömungsquerschnittsflächen physikalisch und technisch sinnvoll und lieferte im Falle der zuvor diskutierten Staubströmungen stets ausreichend gute Näherungen, die auch die Bestimmung einer FROUDE-Zahl zuließen.

Darüber hinaus sei an dieser Stelle angemerkt: Unabhängig von der Bemessungsmethode der Querschnittsflächen nimmt die Oberfläche der Strömung mit der Verformung zu. Dies bedeutet, dass im Falle der verformten Tori stets berücksichtigt werden muss, dass Oberflächeneffekte eine zunehmend dominante Rolle spielen.

In Abb. 8.3 (c) sind die FROUDE-Zahlen der vier Tori aufgetragen. Zur Berechnung der FROUDE-Zahl $Fr = (\sqrt{2\pi} v)/(\sqrt{A} \omega_0)$ wurde die für diese Simulationen angewendete Beziehung $\omega_0 = \sqrt{\omega_r \omega_z} = \text{const.}$ verwendet.² Somit verwundert es nicht, dass sich die Verläufe stark ähneln, da sie lediglich von den zwei zuvor präsentierten Größen abhängen. Aufgrund der Abweichungen in den Querschnittsflächen durchschreiten die Graphen den kritischen Wert $Fr = 1$ auf der steigenden Flanke versetzt zueinander. Die drastische Abbremsung der Strömung und die schlagartige Aufweitung sämtlicher Strömungsquerschnitte sorgen dafür, dass die fallende Flanke aller Kurven die kritische Bedingung an nahezu der gleichen Stelle passiert. Es tritt also in allen vier Tori ein Hydraulic Jump auf – und zwar nahezu am selben Ort.

¹ Dieses Gedankenexperiment lässt sich fortführen, indem nun angenommen wird, der Staub ströme in zwei Schichten mit Abstand d_s und halber Breite $L/2$. In diesem Falle wäre das Flächenmaß $Ld_s/2$. Im Falle von drei Schichten mit jeweils dem Abstand d_s ergäbe sich für die Fläche $2Ld_s/3$ usw. Zwar berücksichtigt dieses Beispiel nicht den Übergang zur gekrümmten Form, jedoch wird die Problematik deutlich. Auch der naive Ansatz, in diesem Beispiel stets einen halben Partikelabstand zur konvexen Hülle dazu zu geben, würde keine konstanten Flächen liefern. Darüber hinaus wäre er physikalisch problematisch, da in verschiedene Richtungen verschiedene Confinementstärken vorherrschen und eine Gleichgewichtung der Richtungen damit der Situation kaum gerecht zu werden vermag.

² Bereits bei der Definition der FROUDE-Zahl für den Fall eines rotationssymmetrischen Confinements wurde darauf verwiesen, dass es sich um eine Näherung handelt. Im hier präsentierten Fall der elliptischen Verformung ist die verwendete FROUDE-Zahl sodann auch als „educated guess“ zu verstehen. Die Frage, der hier nachgegangen wird, ist, ob sich die Strömungen trotz Verformung gleich – oder zumindest ähnlich verhalten. Die Frage nach der Ausbreitung von Oberflächenwellen in Kanälen mit anisotropen Einschlussbedingungen ist hierfür nachrangig.

Abbildung 8.3 (d) zeigt die mittlere kinetische Staubtemperatur in den Strömungszentren der Staubtori. Die Kurvenverläufe entsprechen einander über weite Strecken. Größere Abweichungen beginnen für stark verformte Tori gegen Ende der Beschleunigungsphase. Hier kommt es bei den stark verformten Tori, in denen die Partikel in diesem Bereich in nur zwei bzw. drei Schichten strömen, zu einer Abkühlung. Die Temperaturen liegen hier deutlich unter den Werten, die im Torus mit kreisrundem Strömungsquerschnitt auftreten. Am Ort des Hydraulic Jumps sind in allen vier Kurven steile Anstiege auf mehrere tausend Kelvin zu finden. In der Abkühlungsphase sind die Kurvenverläufe wieder nahezu deckungsgleich.

In Abb. 8.3 (e) ist die mittlere Partikeldichte im Strömungsverlauf dargestellt, wie sie sich aus dem inversen Voronoivolumen ergibt. Die drei Kurven für die Frequenzverhältnisse 1:1, 3:2 und 3:1 sind nahezu deckungsgleich, die Dichte für das Verhältnis 6:1 scheint leicht erhöht (um etwa 5% gegenüber den anderen Kurven). Eine mögliche Erklärung für die erhöhte Dichte liegt in der Annahme eines strukturellen Phasenübergangs, der mit der Verformung des Confinements einhergeht und eine Umordnung der Partikel beinhaltet. Der Übergang von kreisrunden oder elliptischen Formen hin zu geschichteten Systemen ermöglicht in der Partikelanordnung andere, zum Teil dichtere Kristallsysteme. Ähnliche Befunde zu strukturellen Phasenübergängen sind aus statischen Systemen bekannt, wo beispielsweise die „Zig-Zag Transition“ ein häufiger Forschungsgegenstand ist [309, 310, 313–315]. Darüber hinaus sei noch angemerkt: Im zuvor genannten Bereich, in dem die stark verformte Strömung lediglich in zwei Schichten verläuft, ist die Analyse stark fehleranfällig, da hier in der Regel keine geschlossenen VORONOI-Zellen gebildet werden können.

Abbildung 8.3 (f) zeigt den Kopplungsparameter Γ . Für die Berechnung dieses Wertes wird aus der Partikeldichte der jeweils zugehörige WIGNER-SEITZ-Radius gebildet. Im Beschleunigungsbereich zeigen die Graphen eine gute Übereinstimmung, nur im Bereich der größten Querschnittsflächen liegen die Werte für den Torus mit rundem Querschnitt etwas niedriger. Gegen Ende der Beschleunigungsphase macht sich die Abkühlung der stark verformten Tori bemerkbar. Für sie steigt die Kopplung in diesem Bereich, bevor bei allen vier Graphen die Werte im Bereich des Hydraulic Jumps auf ihr Minimum fallen. Anschließend steigen die Werte des Kopplungsparameters in allen Fällen steil an.

Insgesamt zeigt sich eine gute Übereinstimmung des Strömungsverhaltens aller vier Staubtori. Markante makroskopische Größen wie der Teilchenstrom, die Toroidalgeschwindigkeit oder auch die Partikeldichte zeigen sehr ähnliche Verläufe. Die schlagartige Aufweitung der Strömungsquerschnitte tritt in allen Fällen an nahezu der gleichen Stelle auf. Auch die charakteristische Aufheizung im Bereich der plötzlichen Abbremsung ist in allen Fällen zu beobachten, jedoch macht sich bei dieser Größe auch die zunehmende Bedeutung von Oberflächeneffekten bemerkbar.

8.3 Simulationen zur Variation der Einschlussgeometrie – mikrophysikalische Größen

Ergänzend zu den bisherigen Vergleichen soll der Blick nun auf die mikrophysikalischen Größen der vier Strömungen gerichtet werden. In den Untersuchungen hierzu wurden im vorangegangenen Kap. 7 für Tori mit kreisrunden Strömungsquerschnitten unter anderem zwei entscheidende Merkmale der inhomogenen Strömung benannt:

1. Die Beschleunigung und Verzögerung der Strömung bewirken eine Zugspannung bzw. Druckspannung auf die strömenden Nachbarschaften, so dass es zu einer Verformung derselben kommt.
2. Die Umordnungsprozesse, die mit strukturellen Phasenübergängen einhergehen, verlaufen bevorzugt scherartig, was zu geringen Dehnungsraten im Verhältnis zu den Rotationsraten führt.

Ob diese Zusammenhänge auch im verformten Torus Bestand haben, soll im Folgenden überprüft werden.

Zur Bestimmung der Nachbarpartikel wird auch hier die DELAUNAY-Triangulation verwendet. Wie bereits bei der Berechnung der VORONOI-Zellen zur Bestimmung der Partikeldichte im Falle zuvor, ist auch hier mit Problemen bei dem stark verformten Torus zu rechnen. Im Bereich von etwa 12:00 h bis ca. 4:30 h strömt hier der Staub in lediglich zwei Schichten. Entsprechend ist eine Definition vollständiger, umgebender Nachbarschaften nicht möglich. In den folgenden Darstellungen ist aus diesem Grunde der entsprechende Bereich der Strömung grau gepunktet markiert.

Die Analyse der Mikrophysik wurde analog zu den vorangegangenen Untersuchungen in Abschn. 7.3 durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 8.4 zusammengefasst. In Abb. 8.4 (a) ist die Elliptizität ε der Nachbarschaften entsprechend Gleichung (7.2) abgebildet. Die Graphen für das kreisrunde und das lediglich leicht verformte Confinement zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Bei ca. 7:00 h schneiden alle vier Kurven die Nulllinie mit einer positiven Flanke und zeigen während der gesamten Beschleunigungsphase eine positive Elliptizität von etwa $\varepsilon \approx 0,1$, die eine prolate Verformung anzeigt. Im Falle des grünen Graphen, der im Bereich 12:00 h bis 4:30 h grau markiert ist und die Strömung im stark verformten Confinement repräsentiert, findet in diesem Bereich scheinbar eine enorme Verformung statt. Dies ist ein Artefakt der Zweischichtigkeit des Systems: Da auf einer Seite Nachbarn „fehlen“, ist die Abmessung der Nachbarschaften in radialer Richtung halbiert, und die Verformung scheinbar verstärkt. Der Übergang von prolater in oblate Form findet bei allen vier Kurven nahezu an der gleichen Stelle statt und das anschließende Minimum der Elliptizität liegt bei ähnlichen Werten ($\varepsilon \approx -0,15 \dots -0,2$). In der Verzögerungsphase verlaufen die vier Graphen sehr ähnlich.

Die mittleren Dehnungsraten S [vgl. Gleichung (7.7)], die in Abb. 8.4 (b) dargestellt sind, zeigen ebenfalls einen sehr ähnlichen Verlauf. Auch hier verlaufen die Kurven nahezu deckungsgleich – mit Ausnahme des Verlaufs der Kurve für starke Verformung im zweischichtigen Bereich. Bei etwa 7:00 h schneiden die positiven Flanken der Kurven die Nulllinie und steigen im Beschleunigungsbereich bis auf einen Wert von etwa $S = 2 \text{ s}^{-1}$. Anschließend nimmt die Dehnungsrate moderat ab und erreicht im Bereich um 3:00 h einen Wert von $S \approx 0 \text{ s}^{-1}$. Hieran schließt sich in allen Graphen eine steile Abnahme bis auf ein Minimum von etwa $S = -12 \text{ s}^{-1}$ an, von wo aus die steigende Flanke im Verzögerungsbereich beginnt.

Wie bereits für den Fall der Strömung mit kreisrunden Querschnitten gezeigt (vgl. Abb. 7.9), tritt auch hier die Dehnungsrate vorzugsweise in Strömungsrichtung auf. Dies äußert sich in der Verformung der Nachbarschaften: In Phasen positiver Dehnungsrate werden sie entlang der Strömung elongiert – und besitzen so eine prolate Form –, während der Phasen negativer Dehnungsrate werden sie in eben dieser Richtung komprimiert – und weisen daher eine oblate Form auf.

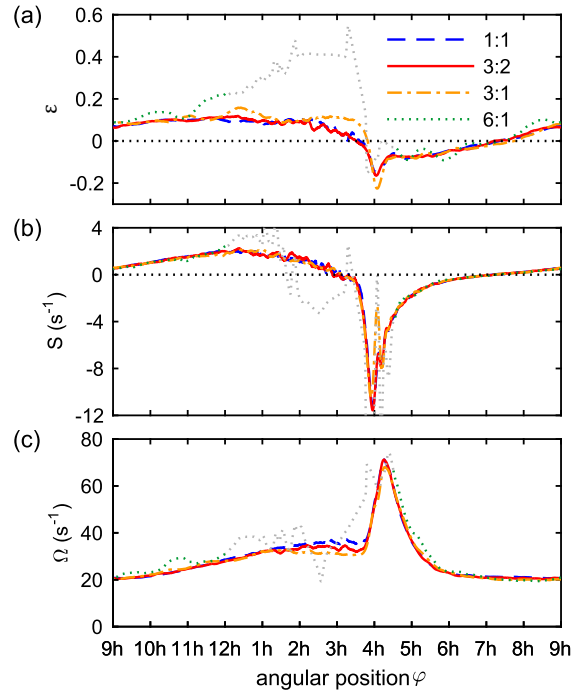


Abbildung 8.4: Charakteristische mikrophysikalische Strömungsgrößen für vier verschiedene Confinement-Geometrien. In der Legende ist das Verhältnis aus radialer Einschlussfrequenz und axialer Einschlussfrequenz gegeben (blau gestrichelt: 1:1, rot durchgezogen: 3:2, orange Punkt-Strich: 3:1, grün gepunktet: 6:1). Das Produkt beider Frequenzen ist konstant gehalten. Im Falle der stärksten Verformung strömt der Staub streckenweise in nur noch zwei Schichten. Dies führt zur Instabilität der Auswertung, da keine geschlossenen Nachbarschaften existieren. Werte des entsprechenden Bereichs sind daher ausgegraut dargestellt. (a) Verlauf der mittleren Elliptizität ε , (b) Dehnungsrate S und (c) Rotationsrate Ω .

In Abb. 8.4(c) sind die mittleren Rotationsraten Ω der vier Tori entsprechend Gleichung (7.8) dargestellt. Auch hier ist eine gute Überdeckung aller vier Kurven zu finden – mit Ausnahme des Bereichs der zweiseichtigen Strömung. Die Rotationsrate liegt bei 7:00 h im Bereich von $\Omega \approx 20 \text{ s}^{-1}$ und beginnt dann in der Beschleunigungsphase einen moderaten Anstieg auf etwa $\Omega = 35 \text{ s}^{-1}$. Bei ca. 3:30 h zeigen die Kurven einen steilen Anstieg auf ein Maximum von etwa $\Omega = 70 \text{ s}^{-1}$, von dem aus die Rotationsraten bis 7:00 h wieder auf ihren Minimalwert fallen.

Auch hier zeigt die Übereinstimmung der Kurven, dass das Verhalten der verformten Tori demjenigen des Torus mit kreisrundem Querschnitt sehr stark ähnelt. In allen vier Fällen ist der ermittelte Wert der Rotationsrate um etwa eine Größenordnung über dem Wert der Dehnungsrate. Somit kann die vorangegangene Interpretation der Bevorzugung der Scherbewegung gegenüber volumenverändernder Kompressionsbewegungen (vgl. Abschn. 7.3.2) auch für den Fall der elliptisch verformten Tori übernommen werden.

8.4 Diskussion des Einflusses einer elliptischen Verformung des Einschlusses auf die toroidale Staubströmung

Wie im Verlaufe der vorliegenden Arbeit mehrfach erörtert, hat jede Parametervariation einen Einfluss auf die Strömung. Bereits bei der Untersuchung der Staubströmungen mit kreisrundem Strömungsquerschnitt kann die Härte des Confinements darüber entscheiden, ob sich eine toroidale Staubströmung ausbildet oder nicht. Aus diesem Grunde muss für eine Diskussion des Einflusses der Form der Einschlussgeometrie zunächst sichergestellt werden, dass ein Einfluss auf die Form und nicht auf andere Faktoren, wie beispielsweise das Fallenvolumen, zurückzuführen ist.

Entscheidend für den Füllgrad der Falle sind zum einen die Kraftwirkung, die das Confinement auf den Staub ausübt, und zum anderen die potentielle Energie, die in der Wechselwirkung zwischen Staub und Confinement liegt. Die in diesem Kapitel durchgeführte Berechnung zeigt, dass Strömungsquerschnitte genau dann den gleichen Kraftbetrag an der Oberfläche und das gleiche Oberflächenpotential besitzen, wenn das Produkt der Einschlussfrequenzen in radialer und axialer Richtung konstant gehalten wird ($\omega_r \omega_z = \text{const.}$).

Eine Analyse von Staubströmungen, die diese Bedingung erfüllen, wurde mittels LD-Simulationen durchgeführt und zeigt eine sehr gute Übereinstimmung des Strömungsverhaltens und sämtlicher Strömungsparameter. In allen Fällen ergeben sich nahezu identische Geschwindigkeitsprofile und Teilchenströme, eine falleninduzierte Schalen- bzw. Schichtenbildung, eine Reduktion der Anzahl derselben in der Beschleunigungsphase und eine schlagartige Zunahme an einem festen Ort, der als Hydraulic Jump identifiziert werden kann. Hier tritt in allen vier Tori eine sprunghafte Aufweitung des Strömungsquerschnitts und eine Aufheizung in der kinetischen Staubtemperatur auf. Abweichungen in charakteristischen Größen können durch die wachsende Bedeutung von Oberflächeneffekten und eine veränderte Partikelordnung erklärt werden, die mit dem Übergang von einer Schalen- zu einer Schichtstruktur einhergehen. Sowohl das Verhalten der Mikrophysik in Bezug auf Verformung durch Spannungs- und Kompressionskräfte als auch die dominanten Mechanismen der Umordnung stimmen für alle Torusverformungen überein.

Da die präsentierten Staubtori entsprechend dieser numerischen Überprüfung ein nahezu identisches Strömungsverhalten aufweisen, kann gefolgert werden, dass sie zu ein und derselben Strömungsklasse gehören. Der gewählte Ähnlichkeitsparameter, das Produkt der Einschlussfrequenzen in radialer und axialer Richtung, hat sich hierbei als geeignet erwiesen. Eine mathematische Modellierung der Bedeutung dieser Variation für die gesamte Strömung sowie eine saubere Definition der FROUDE-Zahl für den Fall der Verformung sind hiermit zwar noch nicht gegeben, die Annahme der Übertragbarkeit von Ergebnissen innerhalb einer Strömungsklasse wurde jedoch anhand eines Beispiels gezeigt.

9 | Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gibt Einblick in die Dynamik inhomogen strömender, stark gekoppelter Medien im granularen Übergang. Als Untersuchungsgegenstand hierfür dient eine torusförmige Staubwolke, die aufrecht in einem magnetisierten anodischen Plasma schwebt und eine inhomogene, jedoch stationäre Rotation ausführt [111–118, 120, 121]. Das Interesse an Untersuchungen strömender, (stark) gekoppelter Systeme nimmt seit Jahren stetig zu, sowohl innerhalb des Gebiets der staubigen Plasmen [49, 99–102, 104–108] als auch in anderen Gebieten der Physik, wie beispielsweise im Bereich der Teilchenbeschleuniger und Speicherringe [258–262, 318–320] oder der kolloidalen Suspensionen und Nanofluide [321–325]. Forschungen zu kristallinen Strömungen sind jedoch ausgesprochen rar und ihr experimenteller Nachweis gelang in der Vergangenheit lediglich in Form kristalliner Ionenstrahlen [260–262, 318, 319]. Das hier betrachtete System geht über die bisherigen Erkenntnisse hinaus, da die untersuchte Strömung durch ihre Inhomogenität strukturelle Phasenübergänge provoziert und somit tiefere Einblicke in die Dynamik und Restrukturierung auf der elementaren, mikrophysikalischen Ebene zulässt.

Durch Veränderungen des experimentellen Aufbaus MATILDA-II, gezielte Erweiterungen und Verbesserungen der Diagnostiken sowie durch die Verwendung leistungstärkerer Komponenten wurden experimentelle Untersuchungen auf der kinetischen Ebene – also der Einzelpartikelskala – möglich (vgl. Kap. 3 und 5). Strömungszustände, die zuvor lediglich in Simulationen beobachtet wurden, konnten so experimentell nachgewiesen werden. Darüber hinaus wurden weitere Effekte, wie beispielsweise das Auftreten selbsterregter Staubdichtewellen oder störungsinduzierter, konvektierter Oszillationen, in der Staubströmung entdeckt, untersucht und erklärt. Durch den Vergleich der Partikelströmung mit einer hydrodynamischen Strömung in einem offenen Kanal konnte ein tieferes Verständnis des schockartigen Ereignisses erreicht werden, welches in der verzögernden Staubströmung vorkommen kann. Es konnte eine mathematisch analoge Formulierung zu der des Hydraulic Jumps in Kanalströmungen entwickelt werden, die – obwohl für ein Kontinuumsystem formuliert – das Auftreten und die Entwicklung des Phänomens in diesem diskreten, stark gekoppelten Partikelsystem sehr gut wiedergibt (vgl. Kap. 6). Detaillierte LANGEVIN-Dynamik-Simulationen und neue Auswertungsmethoden lieferten Zugang zu einem umfassenden Verständnis der Staubströmung (vgl. Kap. 7). Die Untersuchungen umfassten hierbei die vollständige dreidimensionale Information, sowohl bezüglich der makroskopischen Dynamik als auch bezüglich der Dynamik auf der kleinstmöglichen Skala, das heißt, die der Partikel und ihrer direkten Nachbarn. Durch die Entwicklung geeigneter Maße, unter anderem für innere Spannungen, für Kompressions- und für Scherbewegungen, konnten die Strömungen auf mikroskopischer Ebene quantitativ charakterisiert werden.

In Bezug auf den Staubtorus vermochten diese Maße darüber hinaus das makroskopische Strömungsverhalten zu begründen. Durch weitergehende Simulationen wurde gezeigt, dass Tori mit kreisrundem Strömungsquerschnitt (und Fallenfrequenz ω_0) und solche mit ellip-tisch verformtem Querschnitt (und den Fallenfrequenzen ω_r und ω_z für radiale und axiale Richtung) eine Strömungsklasse bilden, sofern ihre Einschlüsse die Ähnlichkeitsbedingung $\omega_0^2 = \omega_r \omega_z$ erfüllen (vgl. Kap. 8). Die zentralen Ergebnisse und Erkenntnisse dieser Dissertation sind im Folgenden zusammengefasst:

Analog zur Gleichgewichtsbedingung der Voidkante in ausgedehnten staubigen Plasmen [66, 67, 69, 72, 73, 193] wird das Einschlusspotential der toroidalen Partikelwolken durch ein stabiles Gleichgewicht aus Ionenwindkraft und elektrischer Feldkraft gebildet [112, 158, 196]. Damit ein Torus entstehen kann, muss die Ionenwindkraft im zentralen Bereich des anodischen Plasmas überwiegen. Diese Situation kann in verschiedenen Parameterbereichen des Experiments erreicht werden, so dass durch Wechsel zwischen diesen Bereichen und moderaten Parametervariationen innerhalb dieser Bereiche eine Vielzahl experimenteller Situationen realisierbar ist (vgl. Kap. 5). **Die Voraussetzungen für die Ausprägung eines Voids werden in magnetisierten anodischen staubigen Plasmen in verschiedenen Parameterbereichen erfüllt, so dass inhomogen rotierende torusförmige Partikelwolken mit unterschiedlichem Strömungsverhalten realisiert werden können.**

Staubdichtewellen werden im Staubtorus spontan angeregt, sobald die Systemdimension in Richtung des Ionenwindes eine Mindestgröße von wenigen typischen Wellenlängen der Störung überschreitet (vgl. Kap. 5). Die Energie, die das Wellenfeld gegen die Reibung mit dem Hintergrundgas aufrecht erhält, entstammt den strömenden Ionen und wird durch eine Zwei-Strom-Instabilität des BUNEMAN-Typs übertragen. Die Erfahrungen mit dem Verhalten dieses Wellenfeldes fügen sich nahtlos in die Ergebnisse anderer Arbeiten zu dieser Thematik ein [111, 178, 196, 269–271] und erweitern hier die Wissensbasis um inhomogen strömende Systeme. Insbesondere im Bereich der Größenbedingung für das Auftreten der Störung und bezüglich zeitlicher und räumlicher Kohärenz lassen sich Modellvorstellungen von kompakten, ruhenden Staubwolken auf die ausgedehnte, rotierende Toruswolke übertragen. **Mechanismus und Bedingungen zur Anregung selbsterregter Staubdichtewellen gleichen im strömenden Staubtorus denen einer kompakten Staubwolke.**

Im Rahmen der experimentellen Arbeiten zu dieser Dissertation konnten verschiedene Heizmechanismen identifiziert werden, die die kinetische Temperatur der einzelnen Partikel in der Strömung so weit erhöhen, dass das Strömungsverhalten stark von Zufallsprozessen und Turbulenz beeinflusst wird (vgl. Kap. 5). Neben Staubdichtewellen wurden insbesondere Instabilitäten des anodischen Plasmas als solche Prozesse identifiziert und systematisch unterdrückt. Aufgrund der effektiven Kühlung der Partikel durch die Neutralgasreibung kann der Staubtorus ohne diese Störungen kristallisieren und ein sehr hohes Maß an Interpartikelordnung erlangen. Die Partikel strömen im resultierenden Torus in Schalen/Schichten, die sich streckenweise nicht miteinander vermischen. In diesen Bereichen bildet die Staubströmung ein Analogon zu den gedachten Schichten in der Modellvorstellung eines laminar strömenden Fluids. Das Zusammenströmen und Aufspalten von Schalen/Schichten in der Strömung aufgrund von Beschleunigung und Verzögerung entspricht strukturellen Phasenübergängen.

Insbesondere das Zusammenströmen in der Beschleunigungsphase läuft ungestört ab, ohne erkennbare Turbulenz oder ordnungszerstörende Aufheizungen. Die resultierende Staubströmung im Laborexperiment zeigt viele Übereinstimmungen mit älteren und aktuellen Simulationsergebnissen (vgl. Refs. [113–118, 200] und Kap. 5). Dieser Befund legitimiert die Annahme, dass in einer kristallinen Staubströmung die real auftretenden Heizmechanismen ausreichend klein sind, so dass sie das Strömungsverhalten nur unwesentlich beeinflussen. Daher können sie in den Simulationen von der Betrachtung ausgeschlossen werden. **Aufgrund der effektiven Kühlung durch das Neutralgas kristallisiert eine reale, ungestörte Staubströmung und verhält sich laminar.**

Durch eine gezielte Verformung des Staubtorus lässt sich die Kristallisation der Staubströmung im Laborexperiment erreichen. Mittels detaillierter LANGEVIN-Dynamik-Simulationen konnte gezeigt werden, dass bei geeigneter Wahl des Ähnlichkeitsparameters sämtliche Strömungen gleichen Parameterwertes ähnliche Strömungseigenschaften aufweisen (vgl. Kap. 8). So zeigen Staubströmungen mit radialer Einschlussfrequenz ω_r und axialer Einschlussfrequenz ω_z , für die $\omega_r\omega_z = \text{const.}$ gilt, einen nahezu gleichen Partikelstrom und phasengleiche Modulationen aller untersuchten Größen. Insbesondere ergeben sich praktisch identische Geschwindigkeitsprofile, kinetische Temperaturen und Kopplungsparameter. Lediglich in der Bemessung der Dichten und Querschnittsflächen sind kleine Unterschiede zu verzeichnen. Letztere können zum einen auf die wachsende Bedeutung von Oberflächeneffekten in verformten Tori zurückgeführt werden und zum anderen auf die Granularität des Systems, die unterschiedliche Kristallstrukturen in gekrümmten und geschichteten Strömungsquerschnitten zulässt. Die mikrophysikalischen Größen, wie beispielsweise die Elliptizität der Nachbarschaften, die Dehnungsraten und die Rotationsraten, zeigen darüber hinaus in den verschiedenen Strömungen ein nahezu identisches Verhalten. **Makro- und mikrophysikalische Strömungseigenschaften sind unabhängig von einer elliptischen Verformung des Einschlusses – Strömungen verschiedenen Querschnitts können zu Klassen gebündelt werden.**

Die Staubströmung weist in geeigneten Parameterbereichen einen heftigen, schockartigen Übergang von einer schnellen in eine langsame Strömung auf. Dieses Ereignis wurde in der Vergangenheit als stehender „Bow Shock“ interpretiert [200]. Der Vergleich dieses Ereignisses mit dem hydrodynamischen Konzept des Hydraulic Jumps in einer offenen Kanalströmung [288] zeigte, dass sich die entsprechende Modellvorstellung eines stationären Sprungs aufgrund einer der Strömung entgegenlaufenden Oberflächenwelle auch auf die toroidale Staubströmung treffend anwenden lässt (vgl. Kap. 6). Das mathematische Modell lässt sich gut auf eine vereinfachte Geometrie mit einem paraboloiden Confinement in Zylindergeometrie übertragen. Mit diesem Modell gelingt es, eine kritische Geschwindigkeit zu definieren, bei der ein Hydraulic Jump auftritt. Es ist bemerkenswert, dass das Modell sehr gute Aussagen zu dem Verhalten toroidaler Staubströmungen macht, obwohl es für eine inkompressible Fluidströmung entlang einer Geraden entwickelt wurde. Insbesondere dies kann auch als Hinweis auf die Robustheit und Universalität des schockartigen Ereignisses verstanden werden. **Bei der Verlangsamung einer Staubströmung in einem Confinement kommt es zu einem stehenden, schockartigen Ereignis, wenn eine kritische Geschwindigkeit unterschritten wird. Dieser Sachverhalt kann – auch mathematisch – analog zum hydrodynamischen „Hydraulic Jump in Open Channel Flows“ beschrieben und erklärt werden.**

Die betrachtete torusförmige Staubwolke ist ein YUKAWA-System. Im Vergleich zum Großteil der Betrachtungen im Forschungsfeld der staubigen Plasmen ruht der dreidimensionale Cluster jedoch nicht, sondern führt eine inhomogene Rotation aus, so dass es zu strukturellen Phasenübergängen kommt. In Analogie zu anderen gut verstandenen Clustern, wie beispielsweise YUKAWA-Bällen [58–60], findet sich auch im strömenden System eine Confinement-induzierte Schalenbildung (vgl. Kap. 5 und Kap. 7). Diese Anordnung bildet, sowohl dort wie hier, den Grundzustand ausgekühlter Systeme. Eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen dem statischen und dem dynamischen Fall ist ebenfalls bei den Dichteprofilen zu finden. In beiden Fällen zeigt sich aufgrund eines elektrostatischen Kraftgradienten eine Zunahme der Dichte von außen nach innen [60, 125, 295]. Auch die Partikelordnung der strömenden Schichten entspricht derjenigen, die in statischen 3D-Systemen in engen Kanälen vorkommen kann – sowohl dort wie auch im Torus mit stark elliptischem Querschnitt finden sich im laminaren Bereich Strukturen, die dichte Kugelpackungen in fcc- und hcp-Konfiguration darstellen [278–280]. **Ordnungsphänomene, wie sie in statischen YUKAWA-Systemen auftreten, sind in analoger Weise in relaxierten Staubströmungen zu finden und zu verstehen.**

Die Kristallisation in YUKAWA-Bällen läuft (auch energetisch) auf mehreren Ebenen entsprechend einem festen Muster ab. Zunächst führt die Abkühlung eines flüssigen Clusters zu einer Schalenbildung von außen nach innen [232, 268, 326]. Anschließend bildet sich auf den Schalen die Ordnung aus. Die Partikel ordnen sich innerhalb der Schalen und in Bezug auf die Nachbarschalen so an, dass die Korrelationsenergie minimiert wird. Das Schmelzen verläuft in umgekehrter Reihenfolge [306, 327]. Im Staubtorus können – insbesondere bei geringer Neutralgasreibung – strukturelle Übergänge zu einer Aufheizung und damit zu einem Schmelzen der lokalen Kristallisation führen. LANGEVIN-Dynamik-Simulationen zeigen, dass bei Aufheizung der Staubströmung zunächst die Ordnung innerhalb der einzelnen Schalen verloren geht. Ist die Aufheizung noch größer, so wie es beispielsweise am Ort des „Hydraulic Jump“ vorkommen kann, löst sich auch die Schalenordnung von innen nach außen hin auf und die Partikelordnung geht in einen flüssigen Zustand über (vgl. Kap. 7). Die Rekristallisation verläuft umgekehrt: Zunächst bilden sich von außen nach innen wieder Schalen aus und anschließend auch die Ordnung auf diesen. Die Hierarchisierung in Schmelz- und Kristallisationsprozessen von YUKAWA-Systemen ist somit nicht auf statische Systeme beschränkt, sondern konnte hier erstmals auch in einem strömenden System gezeigt werden. Es gilt deshalb: **Das Schmelz- und Rekristallisationsverhalten statischer YUKAWA-Systeme ist auf strukturelle Phasenübergänge in inhomogenen Staubströmungen übertragbar – insbesondere zeigt sich in beiden Systemen eine Hierarchisierung der Ordnungsphänomene.**

Die detaillierte Analyse der Verformung der Partikelnachbarschaften zeigt einen eindeutigen Zusammenhang zwischen prolater Form (entlang der Strömung elongiert) in der Beschleunigungsphase der Strömung und oblater Form (in Strömungsrichtung komprimiert) in der Verzögerungsphase (vgl. Kap. 7). Die Dynamik dieser Verformung kann mit Hilfe der neu eingeführten longitudinalen Dehnungsrate bemessen werden. Die aus diesen Verformungen resultierenden Umordnungsprozesse weisen Ähnlichkeiten mit Untersuchungen statischer Systeme auf, deren Einschlusspotential variiert wird [315]. Hier wie dort führt eine Elongation des Systems entlang einer Richtung zu einer Umordnung,

die sich insbesondere in der dazu transversalen Richtung zeigt. Mikroskopisch gesehen bilden sich durch die wachsende Entfernung zwischen Partikeln entlang der Dehnungsachse energetisch günstige Zwischengitterplätze, die durch Sprünge außenliegender Partikel besetzt werden. Makroskopisch resultiert aus diesen Schalenwechseln eine Reduktion der Anzahl an Schalen. **Die Beschleunigung und Verzögerung der gesamten Staubströmung führt zu Zug- und Druckspannung auf Partikelnachbarschaften. Die resultierenden Umordnungsprozesse auf der mikrophysikalischen Ebene führen in ihrer Summe zu Veränderungen auf der makrophysikalischen Ebene.**

Strukturelle Phasenübergänge in der Staubströmung sind mit einer Vielzahl mikroskopischer Umordnungen von Partikeln verbunden, die in ihrer Summe zu makroskopischen Veränderungen der Strömung führen. Die Umordnung von Partikeln findet jedoch nicht durch die Bewegung einzelner Partikel statt, sondern setzt sich aus einer Überlagerung der Bewegung einer Gruppe von mehreren Partikeln zusammen (vgl. Kap. 7). Diese Bewegungen verlaufen bevorzugt scherartig und können mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Maß der Rotationsrate Ω auch quantitativ bemessen werden. Die scherartigen Relativbewegungen der Partikel überführen eine lokale Partikelkonfiguration entlang eines Weges minimaler Energie in eine andere, energetisch tiefer liegende Konfiguration. Das ebenfalls eingeführte Maß der Dehnungsrate S zeigt, dass diese Vorgänge kaum Volumenarbeit verrichten. Dieser Befund gliedert sich gut in den Kontext weiterer Experimente ein, die die Struktur von YUKAWA-Clustern untersuchen. Sowohl die Tendenz zur kollektiven Bewegung als auch die Bevorzugung von Scherbewegungen und -moden gehören hier zu den einschlägigen Erfahrungen [300, 302]. **Strukturelle Phasenübergänge in der laminaren Staubströmung zeigen die Präferenz von Scherbewegungen gegenüber Kompressionsbewegungen und folgen mikroskopisch dem Prinzip der Partikelbewegung entlang Trajektorien minimaler Energie.**

Das staubige Plasma besitzt als YUKAWA-System eine Kompressionsfähigkeit, die sowohl im Staubtorus als auch in statischen Systemen wie YUKAWA-Bällen durch einen Dichtegradienten des Systems von der Oberfläche her ins Innere erkennbar ist. Entsprechend ist die Dichtevariation entlang des Strömungszentrums direkt mit der statischen, von dem Füllgrad des Confinement abhängenden Kompression verbunden. Die hierdurch verursachte Modulation der Fluidichte läuft auf der Zeitskala eines Partikelumlaufs ab. Die eigentliche Inkompressibilität ist hier jedoch – in Analogie zur Hydrodynamik – nicht als Eigenschaft des Fluids selbst zu verstehen, sondern als Eigenschaft der Strömung. Die mikroskopische Analyse der Partikelströmung zeigt, dass die dynamischen, strukturellen Veränderungen verhältnismäßig schnell und auf kleinen Längenskalen vonstattengehen. Die Umordnungsprozesse verlaufen in erster Näherung ohne Volumenarbeit zu verrichten. Dies gilt strikt im laminaren Bereich der Strömung und behält – mit kleinen Einschränkungen – selbst im Bereich des Hydraulic Jumps noch Gültigkeit. Ein ähnliches Verhalten wurde in zweidimensionalen, statischen Systemen beobachtet [302] und äußert sich unter anderem in einer Bevorzugung von volumenerhaltenden Scherbewegungen gegenüber Kompressionsbewegungen und beschränkt sich nicht auf die Phasenübergänge. In der beschleunigenden Strömung werden die WIGNER-SEITZ-Zellen der Partikel gestreckt. Aufgrund des transversalen Zusammenströmens der Schalen läuft diese Veränderung jedoch weitestgehend volumenerhaltend ab.

Gleiches gilt für die Verzögerung der laminaren Strömung. Hier kommt es zu einer Stauung der Zellen, jedoch verlassen Partikel die Nachbarschaft in transversaler Richtung und bilden neue Schalen. Durch dieses Verhalten kann im Verständnis der eigentlich granularen Staubströmung an die Stelle der (punktförmigen) Partikel eine deformierbare, aber nahezu inkompressible (WIGNER-SEITZ-)Zelle treten. Hierdurch wird ein Zusammenhang zu einer hydrodynamischen, volumenfüllenden Strömung hergestellt. Dieses Verständnis legitimiert die Modellierung der granularen Strömung mittels hydrodynamischer Vorstellungen und liefert beispielsweise bezüglich des Hydraulic Jumps sehr gute Einblicke in das System. Die zentrale Erkenntnis der Analyse der Mikrophysik der Staubströmung lautet somit: **Strukturelle Phasenübergänge laufen in inhomogen strömenden, stark gekoppelten YUKAWA-Systemen vorwiegend dynamisch inkompressibel ab.**

Im Rahmen der vorliegenden Dissertation wurde erstmals eine inhomogene kristalline Partikelströmung experimentell beobachtet und untersucht. Im Zusammenspiel zwischen Laborexperimenten und LANGEVIN-Dynamik-Simulationen wurden Einblicke in die Mikro- und Makrophysik des Systems erreicht, die nur durch die Zusammenführung der Erkenntnisse der verschiedenen Ansätze möglich sind. Für die Gesamtströmung wurde eine hydrodynamische Beschreibung entwickelt, die das Auftreten eines schockartigen Übergangs einer schnellen in eine langsame Strömung modelliert und den Übergang durch eine stehende Oberflächenwelle analog zum hydrodynamischen Hydraulic Jump in offenen Kanälen erklärt. Insgesamt konnte das makroskopische Verhalten der Strömung auf mikroskopische Veränderungen der Partikelordnung in der Strömung zurückgeführt werden, die, bezogen auf Phasenübergänge und Hydraulic Jump, eine feste Systematik aufweisen. Die Analyse der Einzelpartikeldynamik zeigt eine Präferenz von Scherbewegungen gegenüber Kompressionsbewegungen und liefert so eine Erklärung dafür, warum sich das System dynamisch inkompressibel verhält.

Insgesamt konnte im Rahmen dieser Dissertation gezeigt werden, dass die inhomogene toroidale Staubströmung – sowohl im Laborexperiment als auch in den detaillierten LANGEVIN-Dynamik-Simulationen – ein geeignetes Modellsystem für stark gekoppelte Strömungen in verschiedenen Aggregatzuständen ist. Als solches ist der Staubtorus zur Zeit im Bereich der staubigen Plasmen und darüber hinaus das einzige System, in dem makroskopisches, hydrodynamisches Verhalten auf mikroskopischer Skala untersucht werden kann.

Literaturverzeichnis

- [1] R. L. MERLINO und J. GOREE, „Dusty Plasmas in the Laboratory, Industry, and Space“, *Phys. Today* **57**, 32–38 (2004).
- [2] G. E. MORFILL und A. V. IVLEV, „Complex plasmas: An interdisciplinary research field“, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1353–1404 (2009).
- [3] M. BONITZ, N. HORING und P. LUDWIG, Hrsg., *Introduction to Complex Plasmas*, Bd. 59, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010).
- [4] C. K. GOERTZ, „Dusty plasmas in the solar system“, *Rev. Geophys.* **27**, 271 (1989).
- [5] G. S. SELWYN, J. E. HEIDENREICH und K. L. HALLER, „Particle trapping phenomena in radio frequency plasmas“, *Appl. Phys. Lett.* **57**, 1876–1878 (1990).
- [6] A. BOUCHOULE, Hrsg., *Dusty Plasmas: Physics, Chemistry, and Technological Impact in Plasma Processing* (Wiley, Chichester, 1999).
- [7] C. HOLLENSTEIN, „The physics and chemistry of dusty plasmas“, *Plasma Phys. Control. Fusion* **42**, R93–R104 (2000).
- [8] R. HIPPLER und H. KERSTEN, „Application of Dusty Plasmas“, in: *Low Temperature Plasmas: Fundamentals, Technologies and Techniques, 2nd Edition*, hrsg. von R. HIPPLER, H. KERSTEN, M. SCHMIDT und K. H. SCHOENBACH (Wiley-VCH, Weinheim, 2008) Kap. 30, S. 787–802.
- [9] J. WINTER, „Dust: A new challenge in nuclear fusion research?“, *Phys. Plasmas* **7**, 3862–3866 (2000).
- [10] M. RUBEL, M. CECCONELLO, J. A. MALMBERG, G. SERGIENKO, W. BIEL *et al.* „Dust particles in controlled fusion devices: morphology, observations in the plasma and influence on the plasma performance“, *Nucl. Fusion* **41**, 1087–1099 (2001).
- [11] G. FEDERICI, C. SKINNER, J. BROOKS, J. COAD, C. GRISOLIA *et al.* „Plasma-material interactions in current tokamaks and their implications for next step fusion reactors“, *Nucl. Fusion* **41**, 1967–2137 (2001).
- [12] J. WINTER, „Dust in fusion devices—a multi-faceted problem connecting high- and low-temperature plasma physics“, *Plasma Phys. Control. Fusion* **46**, B583–B592 (2004).

- [13] J. BECKERS, T. OCKENGA, M. WOLTER, W. W. STOFFELS, J. van DIJK *et al.* „Microparticles in a Collisional Rf Plasma Sheath under Hypergravity Conditions as Probes for the Electric Field Strength and the Particle Charge“, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 115002 (2011).
- [14] H. MAURER, V. SCHNEIDER, M. WOLTER, R. BASNER, T. TROTTENBERG *et al.* „Microparticles as Plasma Diagnostic Tools“, *Contrib. Plasma Phys.* **51**, 218–227 (2011).
- [15] H. IKEZI, „Coulomb solid of small particles in plasmas“, *Phys. Fluids* **29**, 1764–1766 (1986).
- [16] H. THOMAS, G. E. MORFILL, V. DEMMEL, J. GOREE, B. FEUERBACHER *et al.* „Plasma Crystal: Coulomb Crystallization in a Dusty Plasma“, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 652–655 (1994).
- [17] J. H. CHU und L. I, „Direct observation of Coulomb crystals and liquids in strongly coupled rf dusty plasmas“, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 4009–4012 (1994).
- [18] Y. HAYASHI und K. TACHIBANA, „Observation of Coulomb-Crystal Formation from Carbon Particles Grown in a Methane Plasma“, *Jpn. J. Appl. Phys.* **33**, L804–L806 (1994).
- [19] A. MELZER, T. TROTTENBERG und A. PIEL, „Experimental determination of the charge on dust particles forming Coulomb lattices“, *Phys. Lett. A* **191**, 301–308 (1994).
- [20] D. J. WINELAND, J. C. BERGQUIST, W. M. ITANO, J. J. BOLLINGER und C. H. MANNEY, „Atomic-Ion Coulomb Clusters in an Ion Trap“, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2935–2938 (1987).
- [21] F. DIEDRICH, E. PEIK, J. M. CHEN, W. QUINT und H. WALTHER, „Observation of a Phase Transition of Stored Laser-Cooled Ions“, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2931–2934 (1987).
- [22] M. DREWSSEN, C. BRODERSEN, L. HORNEKÆR, J. S. HANGST und J. P. SCHIFFER, „Large Ion Crystals in a Linear Paul Trap“, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2878–2881 (1998).
- [23] P. PIERANSKI, „Colloidal crystals“, *Contemp. Phys.* **24**, 25–73 (1983).
- [24] H. LÖWEN, „Twenty years of confined colloids: from confinement-induced freezing to giant breathing“, *J. Phys. Condens. Matter* **21**, 474203 (2009).
- [25] V. E. FORTOV, A. V. IVLEV, S. A. KHRAPAK, A. G. KHRAPAK und G. E. MORFILL, „Complex (dusty) plasmas: Current status, open issues, perspectives“, *Phys. Rep.* **421**, 1–103 (2005).
- [26] H. M. THOMAS und G. E. MORFILL, „Melting dynamics of a plasma crystal“, *Nature* **379**, 806–809 (1996).
- [27] R. A. QUINN, C. CUI, J. GOREE, J. B. PIEPER, H. THOMAS *et al.* „Structural analysis of a Coulomb lattice in a dusty plasma“, *Phys. Rev. E* **53**, R2049–R2052 (1996).
- [28] A. MELZER, V. A. SCHWEIGERT, I. V. SCHWEIGERT, A. HOMANN, S. PETERS *et al.* „Structure and stability of the plasma crystal“, *Phys. Rev. E* **54**, R46–R49 (1996).

- [29] A. MELZER, A. HOMANN und A. PIEL, „Experimental investigation of the melting transition of the plasma crystal“, *Phys. Rev. E* **53**, 2757–2766 (1996).
- [30] V. A. SCHWEIGERT, I. V. SCHWEIGERT, A. MELZER, A. HOMANN und A. PIEL, „Plasma Crystal Melting: A Nonequilibrium Phase Transition“, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5345–5348 (1998).
- [31] H. TOTSUJI, „Structure and melting of two-dimensional dust crystals“, *Phys. Plasmas* **8**, 1856–1862 (2001).
- [32] A. V. IVLEV, U. KONOPKA, G. MORFILL und G. JOYCE, „Melting of monolayer plasma crystals“, *Phys. Rev. E* **68**, 026405 (2003).
- [33] D. SAMSONOV, J. GOREE, H. M. THOMAS und G. E. MORFILL, „Mach cone shocks in a two-dimensional Yukawa solid using a complex plasma“, *Phys. Rev. E* **61**, 5557–5572 (2000).
- [34] A. MELZER, S. NUNOMURA, D. SAMSONOV, Z. W. MA und J. GOREE, „Laser-excited Mach cones in a dusty plasma crystal“, *Phys. Rev. E* **62**, 4162–4176 (2000).
- [35] D. H. E. DUBIN, „The phonon wake behind a charge moving relative to a two-dimensional plasma crystal“, *Phys. Plasmas* **7**, 3895–3903 (2000).
- [36] O. HAVNES, F. LI, F. MELANDSØ, T. ASLAKSEN, T. W. HARTQUIST *et al.* „Diagnostic of dusty plasma conditions by the observation of Mach cones caused by dust acoustic waves“, *J. Vac. Sci. Technol.* **14**, 525–528 (1996).
- [37] D. SAMSONOV, J. GOREE, Z. W. MA, A. BHATTACHARJEE, H. M. THOMAS *et al.* „Mach Cones in a Coulomb Lattice and a Dusty Plasma“, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3649–3652 (1999).
- [38] N. RAO, P. SHUKLA und M. YU, „Dust-acoustic waves in dusty plasmas“, *Planet. Space Sci.* **38**, 543–546 (1990).
- [39] F. MELANDSØ, „Lattice waves in dust plasma crystals“, *Phys. Plasmas* **3**, 3890–3901 (1996).
- [40] S. PETERS, A. HOMANN, A. MELZER und A. PIEL, „Measurement of dust particle shielding in a plasma from oscillations of a linear chain“, *Phys. Lett. A* **223**, 389–393 (1996).
- [41] M. ZUZIC, H. M. THOMAS und G. E. MORFILL, „Wave propagation and damping in plasma crystals“, *J. Vac. Sci. Technol.* **14**, 496–500 (1996).
- [42] A. HOMANN, A. MELZER, S. PETERS, R. MADANI und A. PIEL, „Laser-excited dust lattice waves in plasma crystals“, *Phys. Lett. A* **242**, 173–180 (1998).
- [43] S. NUNOMURA, D. SAMSONOV und J. GOREE, „Transverse Waves in a Two-Dimensional Screened-Coulomb Crystal (Dusty Plasma)“, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5141–5144 (2000).
- [44] S. KHRAPAK, D. SAMSONOV, G. MORFILL, H. THOMAS, V. YAROSHENKO *et al.* „Compressional waves in complex (dusty) plasmas under microgravity conditions“, *Phys. Plasmas* **10**, 1–4 (2003).
- [45] P. K. SHUKLA und A. A. MAMUN, „Solitons, shocks and vortices in dusty plasmas“, *New J. Phys.* **5**, 17.1–17.37 (2003).

- [46] A. PIEL, M. KLINDWORTH, O. ARP, A. MELZER und M. WOLTER, „Obliquely Propagating Dust-Density Plasma Waves in the Presence of an Ion Beam“, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 205009 (2006).
- [47] A. PIEL, M. KLINDWORTH, O. ARP, A. MELZER und M. WOLTER, „Erratum: Obliquely Propagating Dust-Density Plasma Waves in the Presence of an Ion Beam [Phys. Rev. Lett. **97**, 205009 (2006)]“, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 209903 (2007).
- [48] A. PIEL, O. ARP, M. KLINDWORTH und A. MELZER, „Obliquely propagating dust-density waves“, *Phys. Rev. E* **77**, 026407 (2008).
- [49] V. NOSENKO und J. GOREE, „Shear Flows and Shear Viscosity in a Two-Dimensional Yukawa System (Dusty Plasma)“, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 155004 (2004).
- [50] B. LIU und J. GOREE, „Shear Viscosity of Two-Dimensional Yukawa Systems in the Liquid State“, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 185002 (2005).
- [51] V. E. FORTOV, O. S. VAULINA, O. F. PETROV, M. N. VASILIEV, A. V. GAVRIKOV *et al.* „Experimental study of the heat transport processes in dusty plasma fluid“, *Phys. Rev. E* **75**, 026403 (2007).
- [52] V. NOSENKO, S. ZHDANOV, A. V. IVLEV, G. MORFILL, J. GOREE *et al.* „Heat Transport in a Two-Dimensional Complex (Dusty) Plasma at Melting Conditions“, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 025003 (2008).
- [53] V. A. SCHWEIGERT und F. M. PEETERS, „Spectral properties of classical two-dimensional clusters“, *Phys. Rev. B* **51**, 7700–7713 (1995).
- [54] W.-T. JUAN, Z.-H. HUANG, J.-W. HSU, Y.-J. LAI und L. I, „Observation of dust Coulomb clusters in a plasma trap“, *Phys. Rev. E* **58**, R6947–R6950 (1998).
- [55] Y.-J. LAI und L. I, „Packings and defects of strongly coupled two-dimensional Coulomb clusters: Numerical simulation“, *Phys. Rev. E* **60**, 4743–4753 (1999).
- [56] A. MELZER, M. KLINDWORTH und A. PIEL, „Normal Modes of 2D Finite Clusters in Complex Plasmas“, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 115002 (2001).
- [57] S. G. AMIRANASHVILI, N. G. GUSEIN-ZADE und V. N. TSYTOVICH, „Spectral properties of small dusty clusters“, *Phys. Rev. E* **64**, 016407 (2001).
- [58] O. ARP, D. BLOCK, A. PIEL und A. MELZER, „Dust Coulomb Balls: Three-Dimensional Plasma Crystals“, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 165004 (2004).
- [59] O. ARP, D. BLOCK, M. KLINDWORTH und A. PIEL, „Confinement of Coulomb balls“, *Phys. Plasmas* **12**, 122102 (2005).
- [60] M. BONITZ, D. BLOCK, O. ARP, V. GOLUBNYCHIY, H. BAUMGARTNER *et al.* „Structural Properties of Screened Coulomb Balls“, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 075001 (2006).
- [61] C. HENNING, H. KÄHLERT, P. LUDWIG, A. MELZER und M. BONITZ, „Spectral properties of spherically confined dusty plasma crystals“, *J. Phys. A Math. Theor.* **42**, 214023 (2009).
- [62] M. KLINDWORTH, A. MELZER, A. PIEL und V. A. SCHWEIGERT, „Laser-excited intershell rotation of finite Coulomb clusters in a dusty plasma“, *Phys. Rev. B* **61**, 8404–8410 (2000).

- [63] U. KONOPKA, D. SAMSONOV, A. V. IVLEV, J. GOREE, V. STEINBERG *et al.* „Rigid and differential plasma crystal rotation induced by magnetic fields“, Phys. Rev. E **61**, 1890–1898 (2000).
- [64] F. CHEUNG, A. SAMARIAN und B. JAMES, „The rotation of planar-2 to planar-12 dust clusters in an axial magnetic field“, New J. Phys. **5**, 75.1–75.15 (2003).
- [65] J. CARSTENSEN, F. GREINER, L.-J. HOU, H. MAURER und A. PIEL, „Effect of neutral gas motion on the rotation of dust clusters in an axial magnetic field“, Phys. Plasmas **16**, 013702 (2009).
- [66] G. PRABURAM und J. GOREE, „Experimental observation of very low-frequency macroscopic modes in a dusty plasma“, Phys. Plasmas **3**, 1212–1219 (1996).
- [67] H. ROTHERMEL, T. HAGL, G. E. MORFILL, M. H. THOMA und H. M. THOMAS, „Gravity Compensation in Complex Plasmas by Application of a Temperature Gradient“, Phys. Rev. Lett. **89**, 175001 (2002).
- [68] A. MELZER, *Kolloidale Plasmen unter Schwerelosigkeit: Know-How-Transfer von Kiel nach Greifswald, gefördert durch das Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt – Schlussbericht* (Institut für Physik, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Greifswald, 2017).
- [69] G. E. MORFILL, H. M. THOMAS, U. KONOPKA, H. ROTHERMEL, M. ZUZIC *et al.* „Condensed Plasmas under Microgravity“, Phys. Rev. Lett. **83**, 1598–1601 (1999).
- [70] M. KLINDWORTH, A. PIEL, A. MELZER, U. KONOPKA, H. ROTHERMEL *et al.* „Dust-Free Regions around Langmuir Probes in Complex Plasmas under Microgravity“, Phys. Rev. Lett. **93**, 195002 (2004).
- [71] V. E. FORTOV, A. P. NEFEDOV, O. S. VAULINA, A. M. LIPAEV, V. I. MOLOTKOV *et al.* „Dusty plasma induced by solar radiation under microgravitational conditions: An experiment on board the Mir orbiting space station“, J. Exp. Theor. Phys. **87**, 1087–1097 (1998).
- [72] A. P. NEFEDOV, G. E. MORFILL, V. E. FORTOV, H. M. THOMAS, H. ROTHERMEL *et al.* „PKE-Nefedov*: plasma crystal experiments on the International Space Station“, New J. Phys. **5**, 33.1–33.10 (2003).
- [73] J. GOREE, G. E. MORFILL, V. N. TSYTOVICH und S. V. VLADIMIROV, „Theory of dust voids in plasmas“, Phys. Rev. E **59**, 7055–7067 (1999).
- [74] M. S. BARNES, J. H. KELLER, J. C. FORSTER, J. A. O’NEILL und D. K. COULTAS, „Transport of dust particles in glow-discharge plasmas“, Phys. Rev. Lett. **68**, 313–316 (1992).
- [75] M. D. KILGORE, J. E. DAUGHERTY, R. K. PORTEOUS und D. B. GRAVES, „Ion drag on an isolated particulate in a low-pressure discharge“, J. Appl. Phys. **73**, 7195–7202 (1993).
- [76] S. A. KHRAPAK, A. V. IVLEV, G. E. MORFILL und H. M. THOMAS, „Ion drag force in complex plasmas“, Phys. Rev. E **66**, 046414 (2002).
- [77] S. A. KHRAPAK, A. V. IVLEV, S. K. ZHDANOV und G. E. MORFILL, „Hybrid approach to the ion drag force“, Phys. Plasmas **12**, 042308 (2005).

- [78] I. H. HUTCHINSON, „Ion collection by a sphere in a flowing plasma: 3. Floating potential and drag force“, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, 71–87 (2005).
- [79] I. H. HUTCHINSON, „Collisionless ion drag force on a spherical grain“, Plasma Phys. Control. Fusion **48**, 185–202 (2006).
- [80] L. PATACCHINI und I. H. HUTCHINSON, „Fully Self-Consistent Ion-Drag-Force Calculations for Dust in Collisional Plasmas with an External Electric Field“, Phys. Rev. Lett. **101**, 025001 (2008).
- [81] V. R. IKKURTHI, K. MATYASH, A. MELZER und R. SCHNEIDER, „Computation of charge and ion drag force on multiple static spherical dust grains immersed in rf discharges“, Phys. Plasmas **17**, 103712 (2010).
- [82] I. H. HUTCHINSON und C. B. HAAKONSEN, „Collisional effects on nonlinear ion drag force for small grains“, Phys. Plasmas **20**, 083701 (2013).
- [83] C. ZAFIU, A. MELZER und A. PIEL, „Ion drag and thermophoretic forces acting on free falling charged particles in an rf-driven complex plasma“, Phys. Plasmas **9**, 4794–4803 (2002).
- [84] C. ZAFIU, A. MELZER und A. PIEL, „Measurement of the ion drag force on falling dust particles and its relation to the void formation in complex (dusty) plasmas“, Phys. Plasmas **10**, 1278–1282 (2003).
- [85] M. HIRT, D. BLOCK und A. PIEL, „Measurements of the Ion Drag Force on Micrometer Sized Particles in the Double Plasma Device DODO“, IEEE Trans. Plasma Sci. **32**, 582–585 (2004).
- [86] M. HIRT, D. BLOCK und A. PIEL, „Measurement of the ion drag force on free falling microspheres in a plasma“, Phys. Plasmas **11**, 5690–5696 (2004).
- [87] V. NOSENKO, R. FISHER, R. MERLINO, S. KHRAPAK, G. MORFILL *et al.* „Measurement of the ion drag force in a collisionless plasma with strong ion-grain coupling“, Phys. Plasmas **14**, 103702 (2007).
- [88] M. NAMBU, S. V. VLADIMIROV und P. K. SHUKLA, „Attractive forces between charged particulates in plasmas“, Phys. Lett. A **203**, 40–42 (1995).
- [89] F. MELANDSØ und J. GOREE, „Polarized supersonic plasma flow simulation for charged bodies such as dust particles and spacecraft“, Phys. Rev. E **52**, 5312–5326 (1995).
- [90] V. A. SCHWEIGERT, I. V. SCHWEIGERT, A. MELZER, A. HOMANN und A. PIEL, „Alignment and instability of dust crystals in plasmas“, Phys. Rev. E **54**, 4155–4166 (1996).
- [91] D. BLOCK, J. CARSTENSEN, P. LUDWIG, W. MILOCH, F. GREINER *et al.* „Wake Formation and Wake Field Effects in Complex Plasmas“, Contrib. Plasma Phys. **52**, 804–812 (2012).
- [92] P. LUDWIG, W. J. MILOCH, H. KÄHLERT und M. BONITZ, „On the wake structure in streaming complex plasmas“, New J. Phys. **14**, 053016 (2012).
- [93] P. LUDWIG, H. JUNG, H. KÄHLERT, J.-P. JOOST, F. GREINER *et al.* „Non-Maxwellian and magnetic field effects in complex plasma wakes“, Eur. Phys. J. D, accepted for publication (2017).

- [94] A. BARKAN, R. L. MERLINO und N. D'ANGELO, „Laboratory observation of the dust-acoustic wave mode“, *Phys. Plasmas* **2**, 3563–3565 (1995).
- [95] M. ROSENBERG, „Ion-dust streaming instability in processing plasmas“, *J. Vac. Sci. Technol.* **14**, 631–633 (1996).
- [96] W.-T. JUAN, M.-H. CHEN und L. I, „Nonlinear transports and microvortex excitations in sheared quasi-two-dimensional dust Coulomb liquids“, *Phys. Rev. E* **64**, 016402 (2001).
- [97] S. MITIC, R. SÜTTERLIN, A. V. IVLEV, H. HÖFNER, M. H. THOMA *et al.* „Convective Dust Clouds Driven by Thermal Creep in a Complex Plasma“, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 235001 (2008).
- [98] T. M. FLANAGAN und J. GOREE, „Gas flow driven by thermal creep in dusty plasma“, *Phys. Rev. E* **80**, 046402 (2009).
- [99] G. E. MORFILL, M. RUBIN-ZUZIC, H. ROTHERMEL, A. V. IVLEV, B. A. KLUMOV *et al.* „Highly Resolved Fluid Flows: “Liquid Plasmas” at the Kinetic Level“, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 175004 (2004).
- [100] K. R. SÜTTERLIN, A. WYSOCKI, A. V. IVLEV, C. RÄTH, H. M. THOMAS *et al.* „Dynamics of Lane Formation in Driven Binary Complex Plasmas“, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 085003 (2009).
- [101] Y. SAITOU, Y. NAKAMURA, T. KAMIMURA und O. ISHIHARA, „Bow Shock Formation in a Complex Plasma“, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 065004 (2012).
- [102] J. K. MEYER und R. L. MERLINO, „Transient bow shock around a cylinder in a supersonic dusty plasma“, *Phys. Plasmas* **20**, 074501 (2013).
- [103] J. K. MEYER, J. R. HEINRICH, S.-H. KIM und R. L. MERLINO, „Interaction of a biased cylinder with a flowing dusty plasma“, *J. Plasma Phys.* **79**, 677–682 (2013).
- [104] Y. FENG, J. GOREE und B. LIU, „Observation of Temperature Peaks due to Strong Viscous Heating in a Dusty Plasma Flow“, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 185002 (2012).
- [105] S. A. KHRAPAK, M. H. THOMA, M. CHAUDHURI, G. E. MORFILL, A. V. ZOBININ *et al.* „Particle flows in a dc discharge in laboratory and microgravity conditions“, *Phys. Rev. E* **87**, 063109 (2013).
- [106] S. JAISWAL, P. BANDYOPADHYAY und A. SEN, „Experimental observation of precursor solitons in a flowing complex plasma“, *Phys. Rev. E* **93**, 041201 (2016).
- [107] S. JAISWAL, P. BANDYOPADHYAY und A. SEN, „Experimental investigation of flow induced dust acoustic shock waves in a complex plasma“, *Phys. Plasmas* **23**, 083701 (2016).
- [108] S. K. TIWARI und A. SEN, „Fore-wake excitations from moving charged objects in a complex plasma“, *Phys. Plasmas* **23**, 100705 (2016).
- [109] T. TROTTENBERG, *persönliche Kommunikation*, 2017.
- [110] T. TROTTENBERG, D. BLOCK und A. PIEL, „Magnetisierte Staubige Plasmen unter Schwerkraftbedingungen“, *Verhandlungen der DPG* (2005).
- [111] I. PILCH, A. PIEL, T. TROTTENBERG und M. E. KOEPKE, „Dynamics of small dust clouds trapped in a magnetized anodic plasma“, *Phys. Plasmas* **14**, 123704 (2007).

- [112] I. PILCH, T. REICHSTEIN und A. PIEL, „Torus-shaped dust clouds trapped in a magnetized anodic plasma“, *Phys. Plasmas* **15**, 103706 (2008).
- [113] T. REICHSTEIN, I. PILCH, R. GROSSE-AHLERT und A. PIEL, „Toroidal Dust Clouds and Voids in a Magnetized Anodic Plasma“, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **38**, 814–817 (2010).
- [114] T. REICHSTEIN, I. PILCH und A. PIEL, „Toroidal dust motion in magnetized plasmas“, *Phys. Plasmas* **17**, 093701 (2010).
- [115] T. REICHSTEIN und A. PIEL, „Simulation of dust streaming in toroidal traps: Stationary flows“, *Phys. Plasmas* **18**, 083705 (2011).
- [116] T. REICHSTEIN, J. WILMS, F. GREINER, A. PIEL und A. MELZER, „Experiments and Simulations of Particle Flows in a Magnetized Dust Torus“, *Contrib. Plasma Phys.* **52**, 813–818 (2012).
- [117] T. REICHSTEIN, J. WILMS und A. PIEL, „Dust Streaming in Toroidal Traps“, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **41**, 759–763 (2013).
- [118] T. REICHSTEIN, J. WILMS und A. PIEL, „Spontaneous symmetry breaking in magnetized dust flows“, *Phys. Plasmas* **21**, 023705 (2014).
- [119] A. BARKAN und R. L. MERLINO, „Confinement of dust particles in a double layer“, *Phys. Plasmas* **2**, 3261–3265 (1995).
- [120] J. WILMS, T. REICHSTEIN und A. PIEL, „Experimental observation of crystalline particle flows in toroidal dust clouds“, *Phys. Plasmas* **22**, 063701 (2015).
- [121] A. PIEL und J. WILMS, „Hydraulic jumps in inhomogeneous strongly coupled toroidal dust flows“, *Phys. Plasmas* **23**, 073701 (2016).
- [122] J. WILMS und A. PIEL, „Microphysics of inhomogeneous flowing dusty plasmas studied by molecular dynamics simulations“, *Phys. Plasmas* **24**, 083703 (2017).
- [123] V. N. TSYTOVICH, G. E. MORFILL, S. V. VLADIMIROV und H. M. THOMAS, *Elementary Physics of Complex Plasmas*, Bd. 731, Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008).
- [124] V. FORTOV und G. MORFILL, Hrsg., *Complex and Dusty Plasmas*, Bd. 20093658, Series in Plasma Physics (CRC Press, 2009).
- [125] A. PIEL, *Plasma Physics*, 2. Aufl., Graduate Texts in Physics (Springer International Publishing, Cham, 2017).
- [126] P. K. SHUKLA und A. A. MAMUN, *Introduction to Dusty Plasma Physics*, Series in Plasma Physics (Taylor & Francis, New York, 2001).
- [127] M. BONITZ, C. HENNING und D. BLOCK, „Complex plasmas: a laboratory for strong correlations“, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 066501 (2010).
- [128] E. C. WHIPPLE, „Potentials of surfaces in space“, *Rep. Prog. Phys.* **44**, 1197–1250 (1981).
- [129] E. J. STERNGLASS, „Theory of Secondary Electron Emission by High-Speed Ions“, *Phys. Rev.* **108**, 1–12 (1957).
- [130] B. T. DRAINE und E. E. SALPETER, „On the physics of dust grains in hot gas“, *Astrophys. J.* **231**, 77 (1979).

- [131] O. HAVNES, „Charges on dust particles“, *Adv. Space Res.* **4**, 75–83 (1984).
- [132] H. M. MOTT-SMITH und I. LANGMUIR, „The Theory of Collectors in Gaseous Discharges“, *Phys. Rev.* **28**, 727–763 (1926).
- [133] J. E. ALLEN, „Probe theory - the orbital motion approach“, *Phys. Scripta* **45**, 497–503 (1992).
- [134] M. LAMPE, R. GOSWAMI, Z. STERNOVSKY, S. ROBERTSON, V. GAVRISHCHAKA *et al.* „Trapped ion effect on shielding, current flow, and charging of a small object in a plasma“, *Phys. Plasmas* **10**, 1500–1513 (2003).
- [135] S. A. KHRAPAK, S. V. RATYNSKAIA, A. V. ZOBIN, A. D. USACHEV, V. V. YAROSHENKO *et al.* „Particle charge in the bulk of gas discharges“, *Phys. Rev. E* **72**, 016406 (2005).
- [136] J.-S. CHANG, „Probe theory for arbitrary shape in a large Debye length, stationary plasma“, *Phys. Fluids* **19**, 25–31 (1976).
- [137] S. A. KHRAPAK, G. E. MORFILL, A. G. KHRAPAK und L. G. D’YACHKOV, „Charging properties of a dust grain in collisional plasmas“, *Phys. Plasmas* **13**, 052114 (2006).
- [138] S. A. KHRAPAK und G. E. MORFILL, „An interpolation formula for the ion flux to a small particle in collisional plasmas“, *Phys. Plasmas* **15**, 114503 (2008).
- [139] I. H. HUTCHINSON und L. PATACCINI, „Computation of the effect of neutral collisions on ion current to a floating sphere in a stationary plasma“, *Phys. Plasmas* **14**, 013505 (2007).
- [140] I. H. HUTCHINSON und L. PATACCINI, „Flowing plasmas and absorbing objects: analytic and numerical solutions culminating 80 years of ion-collection theory“, *Plasma Phys. Control. Fusion* **52**, 124005 (2010).
- [141] J. E. ALLEN, R. L. F. BOYD und P. REYNOLDS, „The Collection of Positive Ions by a Probe Immersed in a Plasma“, *Proc. Phys. Soc. Sect. B* **70**, 297–304 (1957).
- [142] E. AHUSBORDE, M. AZAÏEZ, J.-P. CALTAGIRONE, M. GERRITSMA und A. LEMOINE, „Discrete Hodge Helmholtz decomposition“, in: *Twelfth International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics* (Prensas Universitarias de Zaragoza, 2014), S. 1–10.
- [143] A. PIEL und C. SCHMIDT, „Dust charging and charge fluctuations in a weakly collisional radio-frequency sheath at low pressure“, *Phys. Plasmas* **22**, 053701 (2015).
- [144] C. SCHMIDT und A. PIEL, „Stochastic heating of a single Brownian particle by charge fluctuations in a radio-frequency produced plasma sheath“, *Phys. Rev. E* **92**, 043106 (2015).
- [145] C. SCHMIDT und A. PIEL, „Experimental study of the stochastic heating of a single Brownian particle by charge fluctuations“, *Phys. Plasmas* **23**, 083704 (2016).
- [146] M. MIKIKIAN, L. BOUFENDI, A. BOUCHOLE, H. M. THOMAS, G. E. MORFILL *et al.* „Formation and behaviour of dust particle clouds in a radio-frequency discharge: results in the laboratory and under microgravity conditions“, *New J. Phys.* **5**, 19.1–19.12 (2003).
- [147] A. BOUCHOLE und L. BOUFENDI, „Particulate formation and dusty plasma behaviour in argon-silane RF discharge“, *Plasma Sources Sci. Technol.* **2**, 204–213 (1993).

-
- [148] J. BERNDT, E. KOVAČEVIĆ, I. STEFANOVIĆ, O. STEPANOVIĆ, S. H. HONG *et al.* „Some Aspects of Reactive Complex Plasmas“, *Contrib. Plasma Phys.* **49**, 107–133 (2009).
- [149] B. TADSEN, F. GREINER und A. PIEL, „Preparation of magnetized nanodusty plasmas in a radio frequency-driven parallel-plate reactor“, *Phys. Plasmas* **21**, 103704 (2014).
- [150] C. SCHMIDT, O. ARP und A. PIEL, „Spatially extended void-free dusty plasmas in a laboratory radio-frequency discharge“, *Phys. Plasmas* **18**, 013704 (2011).
- [151] C. THOMPSON, A. BARKAN, N. D’ANGELO und R. L. MERLINO, „Dust acoustic waves in a direct current glow discharge“, *Phys. Plasmas* **4**, 2331–2335 (1997).
- [152] T. TROTTENBERG, D. BLOCK und A. PIEL, „Dust confinement and dust-acoustic waves in weakly magnetized anodic plasmas“, *Phys. Plasmas* **13**, 042105 (2006).
- [153] P. S. EPSTEIN, „On the Resistance Experienced by Spheres in their Motion through Gases“, *Phys. Rev.* **23**, 710–733 (1924).
- [154] J. CARSTENSEN, H. JUNG, F. GREINER und A. PIEL, „Mass changes of microparticles in a plasma observed by a phase-resolved resonance method“, *Phys. Plasmas* **18**, 033701 (2011).
- [155] H. JUNG, F. GREINER, O. H. ASNAZ, J. CARSTENSEN und A. PIEL, „Exploring the wake of a dust particle by a continuously approaching test grain“, *Phys. Plasmas* **22**, 053702 (2015).
- [156] A. MELZER, *Introduction to Colloidal (Dusty) Plasmas Lecture Notes*, 2. Aufl. (Institut für Physik, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Greifswald, 2016).
- [157] I. H. HUTCHINSON, „Ion collection by a sphere in a flowing plasma: I. Quasineutral“, *Plasma Phys. Control. Fusion* **44**, 1953–1977 (2002).
- [158] T. REICHSTEIN, *Sondendiagnostik zur Analyse von Einschluss und Dynamik von Staub in magnetisierten Plasmen*, Diplomarbeit (Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2008).
- [159] V. R. IKKURTHI, K. MATYASH, A. MELZER und R. SCHNEIDER, „Computation of ion drag force on a static spherical dust grain immersed in rf discharges“, *Phys. Plasmas* **16**, 043703 (2009).
- [160] J. H. CHU, J.-B. DU und L. I, „Coulomb solids and low-frequency fluctuations in RF dusty plasmas“, *J. Phys. D* **27**, 296–300 (1994).
- [161] N. D’ANGELO, „Coulomb solids and low-frequency fluctuations in RF dusty plasmas“, *J. Phys. D* **28**, 1009–1010 (1995).
- [162] M. ROSENBERG, „A note on ion–dust streaming instability in a collisional dusty plasma“, *J. Plasma Phys.* **67**, 235–242 (2002).
- [163] P. K. SHUKLA, „A survey of dusty plasma physics“, *Phys. Plasmas* **8**, 1791–1803 (2001).
- [164] A. PIEL und A. MELZER, „Dynamical processes in complex plasmas“, *Plasma Phys. Control. Fusion* **44**, R1–R26 (2002).

- [165] S. VLADIMIROV und K. OSTRIKOV, „Dynamic self-organization phenomena in complex ionized gas systems: new paradigms and technological aspects“, Phys. Rep. **393**, 175–380 (2004).
- [166] P. K. SHUKLA und B. ELIASSON, „Colloquium : Fundamentals of dust-plasma interactions“, Rev. Mod. Phys. **81**, 25–44 (2009).
- [167] W. D. SURANGA RUHUNUSIRI und J. GOREE, „Dispersion relations for the dust-acoustic wave under experimental conditions“, Phys. Plasmas **21**, 053702 (2014).
- [168] F. VERHEEST, *Waves in Dusty Space Plasmas*, Bd. 245, Astrophysics and Space Science Library (Springer Netherlands, Dordrecht, 2000).
- [169] E. THOMAS und R. MERLINO, „Dust particle motion in the vicinity of dust acoustic waves“, IEEE Trans. Plasma Sci. **29**, 152–157 (2001).
- [170] L. MALTER, E. O. JOHNSON und W. M. WEBSTER, „Studies Of Externally Heated Hot Cathode Arcs, Part I. – Modes Of The Discharge“, RCA Rev. **12**, 415–435 (1951).
- [171] W. M. WEBSTER, E. O. JOHNSON und L. MALTER, „Studies Of Externally Heated Hot Cathode Arcs, Part II. – The Anode-Glow Mode“, RCA Rev. **13**, 163–182 (1952).
- [172] E. O. JOHNSON und W. M. WEBSTER, „Studies Of Externally Heated Hot Cathode Arcs, Part III. – Plasma Density Distributions In The Anode-Glow Mode“, RCA Rev. **16**, 82–108 (1955).
- [173] E. O. JOHNSON, „Studies Of Externally Heated Hot Cathode Arcs, Part IV. – The Low-Voltage Form Of The Ball-Of-Fire Mode“, RCA Rev. **16**, 498–532 (1955).
- [174] B. SONG, N. D’ANGELO und R. L. MERLINO, „On anode spots, double layers and plasma contactors“, J. Phys. D **24**, 1789–1795 (1991).
- [175] T. AN, R. L. MERLINO und N. D’ANGELO, „Cylindrical anode double layers (‘fire-rods’) produced in a uniform magnetic field“, J. Phys. D **27**, 1906–1913 (1994).
- [176] I. LANGMUIR, „The Interaction of Electron and Positive Ion Space Charges in Cathode Sheaths“, Phys. Rev. **33**, 954–989 (1929).
- [177] C. CHARLES, „A review of recent laboratory double layer experiments“, Plasma Sources Sci. Technol. **16**, R1–R25 (2007).
- [178] I. PILCH, T. REICHSTEIN und A. PIEL, „Synchronization of dust density waves in anodic plasmas“, Phys. Plasmas **16**, 123709 (2009).
- [179] J. R. HEINRICH, S.-H. KIM und R. L. MERLINO, „Laboratory Observations of Self-Excited Dust Acoustic Shocks“, Phys. Rev. Lett. **103**, 115002 (2009).
- [180] R. L. MERLINO, J. R. HEINRICH, S.-H. HYUN und J. K. MEYER, „Nonlinear dust acoustic waves and shocks“, Phys. Plasmas **19**, 057301 (2012).
- [181] O. S. VAULINA, A. A. SAMARIAN, O. F. PETROV, B. JAMES und F. MELANDSØ, „Formation of vortex dust structures in inhomogeneous gas-discharge plasmas“, Plasma Phys. Rep. **30**, 918–936 (2004).

-
- [182] T. TROTTENBERG, *Diagnostik mit Resonanzkegeln, Partikeleinschluss und staubakustische Wellen in magnetisierten komplexen Plasmen*, Dissertation (Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2006).
- [183] M. BESTEHORN und F. H. BUSSE, *Hydrodynamik und Strukturbildung*, Springer-Lehrbuch (Springer, Berlin, Heidelberg, 2006).
- [184] H. BHATIA, G. NORGARD, V. PASCUCCI und P.-T. BREMER, „The Helmholtz-Hodge Decomposition—A Survey“, *IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics* **19**, 1386–1404 (2013).
- [185] A. J. CHORIN, „Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations“, *Math. Comput.* **22**, 745 (1968).
- [186] A. PROHL, *Projection and Quasi-Incompressibility Methods for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equations*, *Advances in Numerical Mathematics* (Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1997).
- [187] J. H. FERZIGER und M. PERIĆ, *Numerische Strömungsmechanik* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008).
- [188] F. MARIA DENARO, „On the application of the Helmholtz-Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions“, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **43**, 43–69 (2003).
- [189] A. LINKE, „On the role of the Helmholtz decomposition in mixed methods for incompressible flows and a new variational crime“, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **268**, 782–800 (2014).
- [190] A. LUDU, *Nonlinear Waves and Solitons on Contours and Closed Surfaces*, Springer Series in Synergetics (Springer, Berlin, Heidelberg, 2012).
- [191] Y. TONG, S. LOMBEYDA, A. N. HIRANI und M. DESBRUN, „Discrete multiscale vector field decomposition“, in: *ACM SIGGRAPH 2003 Papers - SIGGRAPH '03* (2003), S. 445–452.
- [192] F. PETRONETTO, A. PAIVA, M. LAGE, G. TAVARES, H. LOPES *et al.*, „Meshless Helmholtz-Hodge Decomposition“, *IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics* **16**, 338–349 (2010).
- [193] D. SAMSONOV und J. GOREE, „Instabilities in a dusty plasma with ion drag and ionization“, *Phys. Rev. E* **59**, 1047–1058 (1999).
- [194] C. O. THOMPSON, N. D'ANGELO und R. L. MERLINO, „The interaction of stationary and moving objects with dusty plasmas“, *Phys. Plasmas* **6**, 1421–1426 (1999).
- [195] E. THOMAS, K. AVINASH und R. L. MERLINO, „Probe induced voids in a dusty plasma“, *Phys. Plasmas* **11**, 1770–1774 (2004).
- [196] I. PILCH, *Synchronization of Dust-Density Waves and Formation of Torus-Shaped Dust Clouds in a Magnetized Anodic Plasma*, Dissertation (Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2010).
- [197] W. E. AMATUCCI, D. N. WALKER, G. GATLING und E. E. SCIME, „Direct observation of microparticle gyromotion in a magnetized direct current glow discharge dusty plasma“, *Phys. Plasmas* **11**, 2097–2105 (2004).

- [198] N. SATO, G. UCHIDA, T. KANEKO, S. SHIMIZU und S. IIZUKA, „Dynamics of fine particles in magnetized plasmas“, *Phys. Plasmas* **8**, 1786–1790 (2001).
- [199] V. Y. KARASEV, E. S. DZLIEVA, A. Y. IVANOV und A. I. EIKHVALD, „Rotational motion of dusty structures in glow discharge in longitudinal magnetic field“, *Phys. Rev. E* **74**, 066403 (2006).
- [200] T. REICHSTEIN, *Confinement and Dynamics of Torus-Shaped Dust Clouds in Magnetized Anodic Plasmas*, Dissertation (Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2014).
- [201] L. PRANDTL, „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung“, in: *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg* (1905), S. 484–491.
- [202] S. TANEDA, „Experimental Investigation of Vortex Streets“, *J. Phys. Soc. Jpn.* **20**, 1714–1721 (1965).
- [203] H. WERLÉ, *Le Tunnel hydrodynamique au service de la recherche aérospatiale*, Publication - Office national d'études et de recherches aérospatiales (O.N.E.R.A, 1974).
- [204] R. MEYNART, „Instantaneous velocity field measurements in unsteady gas flow by speckle velocimetry“, *Appl. Opt.* **22**, 535 (1983).
- [205] R. J. ADRIAN, „Particle-Imaging Techniques for Experimental Fluid Mechanics“, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 261–304 (1991).
- [206] M. RAFFEL, C. E. WILLERT, S. WERELEY und J. KOMPENHANS, *Particle Image Velocimetry*, 2. Aufl., Experimental Fluid Mechanics (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007).
- [207] A. K. PRASAD, „Particle image velocimetry“, *Curr. Sci. India* **79**, 51–60 (2000).
- [208] J. K. SVEEN und E. A. COWEN, „Quantitative Imaging Techniques and Their Application to Wavy Flows“, in: *PIV and Water Waves*, Bd. 9, hrsg. von J. GRUE, P. L.-F. LIU und G. K. PEDERSEN (World Scientific Publishing, Singapore, 2004) Kap. 1, S. 1–50.
- [209] R. J. ADRIAN, „Twenty years of particle image velocimetry“, *Exp. Fluids* **39**, 159–169 (2005).
- [210] R. J. ADRIAN und J. WESTERWEEL, *Particle image velocimetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [211] J. D. WILLIAMS, „Application of particle image velocimetry to dusty plasma systems“, *J. Plasma Phys.* **82**, 615820302 (2016).
- [212] H. G. MAAS, A. GRUEN und D. PAPANTONIOU, „Particle tracking velocimetry in three-dimensional flows“, *Exp. Fluids* **15**, 133–146 (1993).
- [213] N. A. MALIK, T. DRACOS und D. A. PAPANTONIOU, „Particle tracking velocimetry in three-dimensional flows“, *Exp. Fluids* **15-15**, 279–294 (1993).
- [214] T. DRACOS, *Three-Dimensional Velocity and Vorticity Measuring and Image Analysis Techniques*, hrsg. von T. DRACOS, Bd. 4, ERCOFTAC Series (Springer Netherlands, Dordrecht, 1996).

- [215] E. A. COWEN, S. G. MONISMITH, E. A. COWEN und S. G. MONISMITH, „A hybrid digital particle tracking velocimetry technique“, *Exp. Fluids* **22**, 199–211 (1997).
- [216] A. SCHRÖDER und C. E. WILLERT, Hrsg., *Particle Image Velocimetry*, Bd. 112, Topics in Applied Physics (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008).
- [217] E. THOMAS, „Direct measurements of two-dimensional velocity profiles in direct current glow discharge dusty plasmas“, *Phys. Plasmas* **6**, 2672–2675 (1999).
- [218] E. THOMAS, JR., „Direct Measurements of Particle Transport in dc Glow Discharge Dusty Plasmas“, *Phys. Scripta* **T89**, 20 (2001).
- [219] R. FISHER und E. THOMAS, „Thermal Properties of a Dusty Plasma in the Presence of Driven Dust Acoustic Waves“, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **38**, 833–837 (2010).
- [220] J. D. WILLIAMS, E. THOMAS, L. COUËDEL, A. V. IVLEV, S. K. ZHDANOV *et al.* „Kinetics of the melting front in two-dimensional plasma crystals: Complementary analysis with the particle image and particle tracking velocimetries“, *Phys. Rev. E* **86**, 046401 (2012).
- [221] M. P. ARROYO und C. A. GREATED, „Stereoscopic particle image velocimetry“, *Meas. Sci. Technol.* **2**, 1181–1186 (1991).
- [222] K. D. HINSCH, „Three-dimensional particle velocimetry“, *Meas. Sci. Technol.* **6**, 742–753 (1995).
- [223] A. K. PRASAD, „Stereoscopic particle image velocimetry“, *Exp. Fluids* **29**, 103–116 (2000).
- [224] D. H. BARNHART, R. J. ADRIAN und G. C. PAPEN, „Phase-conjugate holographic system for high-resolution particle-image velocimetry“, *Appl. Opt.* **33**, 7159 (1994).
- [225] G. E. ELSINGA, F. SCARANO, B. WIENEKE und B. W. van OUDHEUSDEN, „Tomographic particle image velocimetry“, *Exp. Fluids* **41**, 933–947 (2006).
- [226] E. THOMAS, J. D. WILLIAMS und J. SILVER, „Application of stereoscopic particle image velocimetry to studies of transport in a dusty (complex) plasma“, *Phys. Plasmas* **11**, L37–L40 (2004).
- [227] E. THOMAS und J. WILLIAMS, „Applications of stereoscopic particle image velocimetry: Dust acoustic waves and velocity space distribution functions“, *Phys. Plasmas* **13**, 055702 (2006).
- [228] J. WILLIAMS und E. THOMAS, „Measurement of the Kinetic Dust Temperature of a Weakly Coupled Dusty Plasma“, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **35**, 303–308 (2007).
- [229] J. D. WILLIAMS, „Application of tomographic particle image velocimetry to studies of transport in complex (dusty) plasma“, *Phys. Plasmas* **18**, 050702 (2011).
- [230] J. K. SVEEN, *An introduction to MatPIV v. 1.6.1*, University of Oslo, 2004.
- [231] A. MELZER, M. HIMPEL, C. KILLER und M. MULSOW, „Stereoscopic imaging of dusty plasmas“, *J. Plasma Phys.* **82**, 615820102 (2016).
- [232] H. KÄHLERT und M. BONITZ, „How Spherical Plasma Crystals Form“, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 015001 (2010).
- [233] H. KÄHLERT und M. BONITZ, „Time Evolution from Weak to Strong Coupling in a Spherically Confined Dusty Plasma“, *Contrib. Plasma Phys.* **51**, 519–523 (2011).

- [234] G. UCHIDA, U. KONOPKA und G. MORFILL, „Wave Dispersion Relation of Two-Dimensional Plasma Crystals in a Magnetic Field“, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 155002 (2004).
- [235] M. BONITZ, Z. DONKÓ, T. OTT, H. KÄHLERT und P. HARTMANN, „Nonlinear Magnetoplasmons in Strongly Coupled Yukawa Plasmas“, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 055002 (2010).
- [236] C. K. BIRDSALL und A. B. LANGDON, *Plasma physics via computer simulation* (Taylor & Francis, New York, London, 2004).
- [237] M. P. ALLEN und D. J. TILDESLEY, *Computer simulation of liquids*, 2. Aufl. (Oxford university press, 2017).
- [238] M. R. AKDIM und W. J. GOEDHEER, „Modeling of voids in colloidal plasmas“, *Phys. Rev. E* **65**, 015401 (2001).
- [239] M. R. AKDIM und W. J. GOEDHEER, „Modeling of self-excited dust vortices in complex plasmas under microgravity“, *Phys. Rev. E* **67**, 056405 (2003).
- [240] V. LAND und W. J. GOEDHEER, „Effect of large-angle scattering, ion flow speed and ion-neutral collisions on dust transport under microgravity conditions“, *New J. Phys.* **8**, 8.1–8.23 (2006).
- [241] W. J. MILOCH, H. L. PÉCSELI und J. TRULSEN, „Numerical simulations of the charging of dust particles by contact with hot plasmas“, *Nonlinear Process Geophys.* **14**, 575–586 (2007).
- [242] I. H. HUTCHINSON, „Nonlinear collisionless plasma wakes of small particles“, *Phys. Plasmas* **18**, 032111 (2011).
- [243] K. MATYASH, R. SCHNEIDER, F. TACCOGNA, A. HATAYAMA, S. LONGO *et al.* „Particle in Cell Simulation of Low Temperature Laboratory Plasmas“, *Contrib. Plasma Phys.* **47**, 595–634 (2007).
- [244] V. R. IKKURTHI, K. MATYASH, A. MELZER und R. SCHNEIDER, „Computation of dust charge and potential on a static spherical dust grain immersed in rf discharges“, *Phys. Plasmas* **15**, 123704 (2008).
- [245] L.-J. HOU, A. PIEL und P. K. SHUKLA, „Self-Diffusion in 2D Dusty-Plasma Liquids: Numerical-Simulation Results“, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 085002 (2009).
- [246] T. OTT und M. BONITZ, „Is Diffusion Anomalous in Two-Dimensional Yukawa Liquids?“, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 195001 (2009).
- [247] T. SCHLICK, *Molecular Modeling and Simulation: An Interdisciplinary Guide*, 2. Aufl., Bd. 21, Interdisciplinary Applied Mathematics (Springer, New York, 2010).
- [248] R. COURANT, K. FRIEDRICHS und H. LEWY, „Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik“, *Math. Ann.* **100**, 32–74 (1928).
- [249] NVIDIA CORPORATION, *NVIDIA CUDA C Programming Guide, Vers. 4.2* (NVIDIA Corporation, Santa Clara, CA, 2012).
- [250] NVIDIA CORPORATION, *GPU-Accelerated Applications* (NVIDIA Corporation, Santa Clara, CA, 2016).

- [251] S. F. PORTEGIES ZWART, R. G. BELLEMAN und P. M. GELDOF, „High-performance direct gravitational N-body simulations on graphics processing units“, *New Astron.* **12**, 641–650 (2007).
- [252] R. G. BELLEMAN, J. BÉDORF und S. F. PORTEGIES ZWART, „High performance direct gravitational N-body simulations on graphics processing units II: An implementation in CUDA“, *New Astron.* **13**, 103–112 (2008).
- [253] H. BURAU, R. WIDERA, W. HONIG, G. JUCKELAND, A. DEBUS *et al.* „PConGPU: A Fully Relativistic Particle-in-Cell Code for a GPU Cluster“, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **38**, 2831–2839 (2010).
- [254] I. MOROZOV, A. KAZENNOV, R. BYSTRYI, G. NORMAN, V. PISAREV *et al.* „Molecular dynamics simulations of the relaxation processes in the condensed matter on GPUs“, *Comput. Phys. Commun.* **182**, 1974–1978 (2011).
- [255] P. MERTMANN, D. EREMIN, T. MUSSEN BROCK, R. P. BRINKMANN und P. AWAKOWICZ, „Fine-sorting one-dimensional particle-in-cell algorithm with Monte-Carlo collisions on a graphics processing unit“, *Comput. Phys. Commun.* **182**, 2161–2167 (2011).
- [256] Á. BUDEA, A. DERZSI, P. HARTMANN und Z. DONKÓ, „Shear Viscosity of Liquid-Phase Yukawa Plasmas from Molecular Dynamics Simulations on Graphics Processing Units“, *Contrib. Plasma Phys.* **52**, 194–198 (2012).
- [257] L. NYLAND, M. HARRIS und J. PRINS, „Fast N-Body Simulation with CUDA“, in: *GPU Gems 3*, hrsg. von H. NGUYEN (Pearson Education, Inc., 2008).
- [258] D. HABS, „Crystalline Ion Beams“, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **45**, 391–428 (1995).
- [259] R. W. HASSE, „Theoretical Verification of Coulomb Order of Ions in a Storage Ring“, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3430–3433 (1999).
- [260] T. SCHÄTZ, U. SCHRAMM und D. HABS, „Crystalline ion beams“, *Nature* **412**, 717–720 (2001).
- [261] U. SCHRAMM, T. SCHÄTZ und D. HABS, „Bunched Crystalline Ion Beams“, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 184801 (2001).
- [262] U. SCHRAMM und D. HABS, „Crystalline ion beams“, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **53**, 583–677 (2004).
- [263] J. B. PIEPER und J. GOREE, „Dispersion of Plasma Dust Acoustic Waves in the Strong-Coupling Regime“, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3137–3140 (1996).
- [264] M. ZUZIC, A. V. IVLEV, J. GOREE, G. E. MORFILL, H. M. THOMAS *et al.* „Three-Dimensional Strongly Coupled Plasma Crystal under Gravity Conditions“, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4064–4067 (2000).
- [265] S. ICHIMARU, „Strongly coupled plasmas: high-density classical plasmas and degenerate electron liquids“, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 1017–1059 (1982).
- [266] J. P. SCHIFFER, „Melting of Crystalline Confined Plasmas“, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 205003 (2002).
- [267] C. TOTSUJI, M. S. LIMAN, K. TSURUTA und H. TOTSUJI, „Estimation of screening length and electric charge on particles in single-layered dusty plasma crystals“, *Phys. Rev. E* **68**, 017401 (2003).

- [268] A. PIEL, „Plasma crystals: experiments and simulation“, Plasma Phys. Control. Fusion **59**, 014001 (2017).
- [269] P. K. SHUKLA und M. ROSENBERG, „Boundary effects on dust-ion-acoustic and dust-acoustic waves in collisional dusty plasmas“, Phys. Plasmas **6**, 1038–1040 (1999).
- [270] N.-X. WEI und J.-K. XUE, „Bounded dust-acoustic waves in a cylindrically bounded collisional dusty plasma with dust charge variation“, Phys. Plasmas **13**, 052101 (2006).
- [271] V. V. YAROSHENKO, H. M. THOMAS und G. E. MORFILL, „Dust density waves in a complex plasma layer“, Phys. Plasmas **14**, 082104 (2007).
- [272] J. D. WILLIAMS und E. THOMAS, „Initial measurement of the kinetic dust temperature of a weakly coupled dusty plasma“, Phys. Plasmas **13**, 063509 (2006).
- [273] R. QUINN und J. GOREE, „Single-particle Langevin model of particle temperature in dusty plasmas“, Phys. Rev. E **61**, 3033–3041 (2000).
- [274] M. HIMPEL, T. BOCKWOLDT, C. KILLER, K. OLE MENZEL, A. PIEL *et al.* „Stereoscopy of dust density waves under microgravity: Velocity distributions and phase-resolved single-particle analysis“, Phys. Plasmas **21**, 033703 (2014).
- [275] J. D. WILLIAMS und E. K. SNIPES, „Measurements of the Dust Temperature in the Dispersion Relation of the Dust Acoustic Wave“, IEEE Trans. Plasma Sci. **38**, 847–851 (2010).
- [276] C. SCHMIDT, *Brownsche Bewegung und Heizung einzelner Mikropartikel durch stochastische Ladungsfluktuationen in einer Plasmarandschicht*, Dissertation (Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2017).
- [277] L.-W. TENG, P.-S. TU und L. I, „Microscopic Observation of Confinement-Induced Layering and Slow Dynamics of Dusty-Plasma Liquids in Narrow Channels“, Phys. Rev. Lett. **90**, 245004 (2003).
- [278] B. A. KLUMOV und G. E. MORFILL, „Complex plasma in narrow channels: Impact of confinement on the local order“, JETP Lett. **85**, 498–502 (2007).
- [279] B. A. KLUMOV und G. E. MORFILL, „Characteristics of crystallization of complex plasmas in narrow channels“, J. Exp. Theor. Phys. **107**, 908–915 (2008).
- [280] B. A. KLUMOV und G. E. MORFILL, „Effect of confinement on the crystallization of a dusty plasma in narrow channels“, JETP Lett. **87**, 409–413 (2008).
- [281] B. TADSEN, F. GREINER, S. GROTH und A. PIEL, „Self-excited dust-acoustic waves in an electron-depleted nanodusty plasma“, Phys. Plasmas **22**, 113701 (2015).
- [282] K. O. MENZEL, O. ARP, D. CALIEBE und A. PIEL, „The Structure of Self-Excited Dust-Density Waves Under Microgravity“, IEEE Trans. Plasma Sci. **38**, 838–841 (2010).
- [283] K. O. MENZEL, O. ARP und A. PIEL, „Frequency clusters and defect structures in nonlinear dust-density waves under microgravity conditions“, Phys. Rev. E **83**, 016402 (2011).

-
- [284] V. NOSENKO, J. GOREE, Z. W. MA, D. H. E. DUBIN und A. PIEL, „Compressional and shear wakes in a two-dimensional dusty plasma crystal“, *Phys. Rev. E* **68**, 056409 (2003).
 - [285] A. BOSE und M. S. JANAKI, „Shear-wave Mach cones in a strongly coupled dusty plasma“, *Phys. Plasmas* **13**, 012104 (2006).
 - [286] K. JIANG, V. NOSENKO, Y. F. LI, M. SCHWABE, U. KONOPKA *et al.* „Mach cones in a three-dimensional complex plasma“, *EPL* **85**, 45002 (2009).
 - [287] A. G. KHRAPAK, V. I. MOLOTKOV, A. M. LIPAEV, D. I. ZHUKHOVITSKII, V. N. NAUMKIN *et al.* „Complex Plasma Research under Microgravity Conditions: PK-3 Plus Laboratory on the International Space Station“, *Contrib. Plasma Phys.* **56**, 253–262 (2016).
 - [288] H. CHANSON, *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction ; Basic Principles, Sediment Motion, Hydraulic Modelling, Design of Hydraulic Structures* (Elsevier Butterworth Heinemann, 2004).
 - [289] R. P. GODWIN, „The hydraulic jump (“shocks” and viscous flow in the kitchen sink)“, *Am. J. Phys.* **61**, 829–832 (1993).
 - [290] Y. BRECHET und Z. NÉDA, „On the circular hydraulic jump“, *Am. J. Phys.* **67**, 723–731 (1999).
 - [291] N. ROJAS, M. ARGENTINA und E. TIRAPEGUI, „A progressive correction to the circular hydraulic jump scaling“, *Phys. Fluids* **25**, 042105 (2013).
 - [292] B. MOHAJER und R. LI, „Circular hydraulic jump on finite surfaces with capillary limit“, *Phys. Fluids* **27**, 117102 (2015).
 - [293] F. R. GILMORE, M. S. PLESSET und H. E. CROSSLEY, „The Analogy between Hydraulic Jumps in Liquids and Shock Waves in Gases“, *J. Appl. Phys.* **21**, 243–249 (1950).
 - [294] T. OTT und M. BONITZ, „First-Principle Results for the Radial Pair Distribution Function in Strongly Coupled One-Component Plasmas“, *Contrib. Plasma Phys.* **55**, 243–253 (2015).
 - [295] C. HENNING, H. BAUMGARTNER, A. PIEL, P. LUDWIG, V. GOLUBNICHIIY *et al.* „Ground state of a confined Yukawa plasma“, *Phys. Rev. E* **74**, 056403 (2006).
 - [296] D. H. E. DUBIN und J. P. SCHIFFER, „Normal modes of cold confined one-component plasmas“, *Phys. Rev. E* **53**, 5249–5267 (1996).
 - [297] H. KÄHLERT und M. BONITZ, „Fluid modes of a spherically confined Yukawa plasma“, *Phys. Rev. E* **82**, 036407 (2010).
 - [298] V. NOSENKO, S. K. ZHDANOV, A. V. IVLEV, C. A. KNAPEK und G. E. MORFILL, „2D Melting of Plasma Crystals: Equilibrium and Nonequilibrium Regimes“, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 015001 (2009).
 - [299] J. P. TROADEC, A. GERVOIS und L. OGER, „Statistics of Voronoi cells of slightly perturbed face-centered cubic and hexagonal close-packed lattices“, *Europhys. Lett.* **42**, 167–172 (1998).

- [300] A. MELZER, „Mode spectra of thermally excited two-dimensional dust Coulomb clusters“, Phys. Rev. E **67**, 016411 (2003).
- [301] M. KONG, B. PARTOENS und F. M. PEETERS, „Structural, dynamical and melting properties of two-dimensional clusters of complex plasmas“, New J. Phys. **5**, 23.1–23.17 (2003).
- [302] J. SCHABLINSKI, F. WIEBEN und D. BLOCK, „An optical tweezer for complex plasmas“, Phys. Plasmas **22**, 043703 (2015).
- [303] Y.-J. LAI und L. I., „Avalanche Excitations of Fast Particles in Quasi-2D Cold Dusty-Plasma Liquids“, Phys. Rev. Lett. **89**, 155002 (2002).
- [304] C. YANG, C.-W. IO und L. I., „Cooperative-Motion-Induced Structural Evolution in Dusty-Plasma Liquids with Microheterogeneity: Rupture, Rotation, Healing, and Growth of Ordered Domains“, Phys. Rev. Lett. **109**, 225003 (2012).
- [305] K.-A. LIU und L. I., „Packing and melting of mesoscopically confined two-dimensional Coulomb crystals in straight narrow channels“, Phys. Rev. E **82**, 041504 (2010).
- [306] A. SCHELLA, T. MIKSCH, A. MELZER, J. SCHABLINSKI, D. BLOCK *et al.* „Melting scenarios for three-dimensional dusty plasma clusters“, Phys. Rev. E **84**, 056402 (2011).
- [307] D. H. E. DUBIN, „Theory of structural phase transitions in a trapped Coulomb crystal“, Phys. Rev. Lett. **71**, 2753–2756 (1993).
- [308] L. CÂNDIDO, J.-P. RINO, N. STUDART und F. M. PEETERS, „The structure and spectrum of the anisotropically confined two-dimensional Yukawa system“, J. Phys. Condens. Matter **10**, 11627–11644 (1998).
- [309] S. W. S. APOLINARIO, B. PARTOENS und F. M. PEETERS, „Structure and spectrum of anisotropically confined two-dimensional clusters with logarithmic interaction“, Phys. Rev. E **72**, 046122 (2005).
- [310] A. MELZER, „Zigzag transition of finite dust clusters“, Phys. Rev. E **73**, 056404 (2006).
- [311] S. W. S. APOLINARIO, B. PARTOENS und F. M. PEETERS, „Inhomogeneous melting in anisotropically confined two-dimensional clusters“, Phys. Rev. E **74**, 031107 (2006).
- [312] O. RANCOVA, E. ANISIMOVAS und T. VARANAVIČIUS, „Structural transitions in laterally compressed two-dimensional Coulomb clusters“, Phys. Rev. E **83**, 036409 (2011).
- [313] T. E. SHERIDAN, „Discontinuous structure transition in a Debye cluster“, Phys. Plasmas **19**, 057302 (2012).
- [314] A. BESSAA und M. DJEBLI, „Phase transitions in normal mode spectra of two-dimensional clusters in an anisotropic power-law confining potential“, Physica E Low Dimens. Syst. Nanostruct. **86**, 117–123 (2017).
- [315] S. W. S. APOLINARIO, B. PARTOENS und F. M. PEETERS, „Multiple rings in a 3D anisotropic Wigner crystal: Structural and dynamical properties“, Phys. Rev. B **77**, 035321 (2008).

- [316] S. W. S. APOLINARIO und F. M. PEETERS, „Melting of anisotropically confined Coulomb balls“, *Phys. Rev. B* **78**, 024202 (2008).
- [317] C. KILLER, A. SCHELLA, T. MIKSCH und A. MELZER, „Vertically elongated three-dimensional Yukawa clusters in dusty plasmas“, *Phys. Rev. B* **84**, 054104 (2011).
- [318] U. SCHRAMM, T. SCHÄTZ und D. HABS, „Three-dimensional crystalline ion beams“, *Phys. Rev. E* **66**, 036501 (2002).
- [319] U. SCHRAMM, T. SCHÄTZ, M. BUSSMANN und D. HABS, „Cooling and heating of crystalline ion beams“, *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **36**, 561–571 (2003).
- [320] P.-J. WANG, T. LI, C. NOEL, A. CHUANG, X. ZHANG *et al.*, „Surface traps for freely rotating ion ring crystals“, *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 205002 (2015).
- [321] J. F. BRADY, „The rheological behavior of concentrated colloidal dispersions“, *J. Chem. Phys.* **99**, 567–581 (1993).
- [322] S. BUTLER und P. HARROWELL, „Kinetics of crystallization in a shearing colloidal suspension“, *Phys. Rev. E* **52**, 6424–6430 (1995).
- [323] D. WEN und Y. DING, „Experimental investigation into convective heat transfer of nanofluids at the entrance region under laminar flow conditions“, *Int. J. Heat Mass Transf.* **47**, 5181–5188 (2004).
- [324] J. VERMANT und M. J. SOLOMON, „Flow-induced structure in colloidal suspensions“, *J. Phys. Condens. Matter* **17**, R187–R216 (2005).
- [325] Y. L. WU, D. DERKS, A. van BLAADEREN und A. IMHOF, „Melting and crystallization of colloidal hard-sphere suspensions under shear“, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **106**, 10564–10569 (2009).
- [326] A. SCHELLA, M. MULSOW und A. MELZER, „Correlation buildup during recrystallization in three-dimensional dusty plasma clusters“, *Phys. Plasmas* **21**, 050701 (2014).
- [327] T. OGAWA, H. TOTSUJI, C. TOTSUJI und K. TSURUTA, „Two-Step Melting of Spherical Yukawa and Coulomb Clusters“, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 123501 (2006).

Liste der Publikationen

Einzelne Teile der vorliegenden Dissertation wurden in begutachteten wissenschaftlichen Fachzeitschriften veröffentlicht:

1. J. Wilms, T. Reichstein und A. Piel,
Experimental observation of crystalline particle flows in toroidal dust clouds
Phys. Plasmas **22**, 63701 (2015).
2. A. Piel und J. Wilms,
Hydraulic jumps in inhomogeneous strongly coupled toroidal dust flows
Phys. Plasmas **23**, 73701 (2016).
3. J. Wilms und A. Piel,
Microphysics of inhomogeneous three-dimensional strongly coupled particle flows
Phys. Plasmas **24**, 83703 (2017).

Weitere Beiträge in wissenschaftlichen Fachzeitschriften:

1. T. Reichstein, J. Wilms, F. Greiner, A. Piel und A. Melzer,
Experiments and Simulations of Particle Flows in a Magnetized Dust Torus
Contrib. Plasma Phys. **52**, 813 (2012).
2. T. Reichstein, J. Wilms und A. Piel,
Dust Streaming in Toroidal Traps
IEEE Trans. Plasma Sci. **41**, 759 (2013).
3. T. Reichstein, J. Wilms und A. Piel,
Spontaneous symmetry breaking in magnetized dust flows
Phys. Plasmas **21**, 23705 (2014).
4. A. Piel, D. Block, A. Melzer, M. Mulsow, J. Schablinski, A. Schella, F. Wieben und J. Wilms,
Microphysics of liquid complex plasmas in equilibrium and non-equilibrium systems
Eur. Phys. J. D, accepted for publication (2017).

Ausgewählte Beiträge auf internationalen Konferenzen

1. J. Wilms, T. Reichstein und A. Piel,
 $\vec{E} \times \vec{B}$ - driven Flows in Dusty Plasmas
41st EPS conference on Plasma Physics, Berlin (2014).
2. J. Wilms, T. Reichstein und A. Piel,
Crystalline Particle Flows in Magnetized Anodic Plasmas
14th Workshop on the Physics of Dusty Plasmas, Auburn, Alabama USA (2015).
3. J. Wilms und A. Piel,
Dynamical and structural properties of strongly coupled dust flows in complex plasmas
Quo vadis – Complex plasmas, Hamburg, (2016).

Danksagung

„Das Leben ist nicht immer nur Pommes und Disco ...“

— Christian Steiffen —

... und darum möchte ich an dieser Stelle all denen danken, die es mir in den vergangenen Jahren ermöglicht haben, meinen wissenschaftlichen Werdegang zu gestalten und darüber hinaus ein glücklicher und engagierter Mensch zu sein.

Zunächst geht mein herzlichster Dank an meinen Doktorvater, Herrn Professor Dr. Alexander Piel, der mich bereits für die Diplomarbeit in seine Arbeitsgruppe aufnahm und mir im Anschluss daran das Promotionsvorhaben ermöglichte. Die vielen wertvollen Erfahrungen, Ratschläge und Diskussionen brachten mich stets fachlich und persönlich voran, und ohne seine zahl- und hilfreichen Anregungen wäre diese Arbeit mit Sicherheit nicht so facettenreich ausgefallen, wie sie nun vorliegt. Darüber hinaus danke ich dafür, dass ich die Möglichkeit hatte, meine wissenschaftliche Arbeit auf nationalen und internationalen Tagungen zu präsentieren und zu veröffentlichen, sowie dafür, dass ich Teil unseres Parabelflugteams zur Erforschung staubiger Plasmen unter Schwerelosigkeit werden konnte.

In diesem Zuge möchte ich mich auch für die finanzielle Unterstützung in den vergangenen Jahren bedanken. Insbesondere sind hier das Land Schleswig-Holstein, die Deutsche Forschungsgemeinschaft (im Rahmen des SFB-TR24/A2) und das Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR 50WM1139) zu nennen.

Ich möchte mich auch bei Dr. Franko Greiner und Professor Dr. Dietmar Block bedanken, die mich in den vergangenen Jahren mit konstruktivem Feedback und der einen oder anderen Idee unterstützten. Darüber hinaus konnten wir gemeinsam die Gleichstellungsbemühungen in unserer Sektion ausgesprochen erfolgreich vorantreiben – Physik-Projekt-Tage, Gleichstellungstage, Vorträge auf Tagungen und in Kolloquien etc. wären ohne ihr Engagement nicht denkbar gewesen.

Dr. Torben Reichstein danke ich für die gute Einführung in MATILDA-II bereits zu meiner Zeit als Diplomand und die anschließende Begleitung in der Anfangszeit meiner Promotionsphase. Auch nach Abschluss seiner Dissertation war er noch für Rückfragen und Diskussionen zu Ergebnissen des Experiments ansprechbar. Insbesondere danke ich ihm für das Feedback zu Struktur und Konsistenz dieser Arbeit.

Auch meinen anderen Kollegen und Mitstreitern gilt mein Dank. Jasmin Andersen, Judith Golda, Sebastian Groth, Hendrik Jung, Benjamin Tadsen und Frank Wieben danke ich für die tollen Momente, die wir in den letzten Jahren hatten – sei es im universitären Alltag, in der Kaffeerrunde, auf Tagungen oder nach Feierabend. Auch für das Feedback zu einzelnen Abschnitten dieser Arbeit, zu zahlreichen Fragen rund um die Erstellung des Dokuments sowie für Ideen und Tipps danke ich. An dieser Stelle möchte ich aber auch meine ehemaligen Kollegen nicht vergessen, Dr. Tim Bockwoldt, Dr. David Caliebe, Dr. Kristoffer Menzel und Stefan Schütt, die sowohl im Büro als auch quer über den Flur stets für Gespräche und gute Laune offen waren.

Mario Knüppel, Michael Poser und Volker Rohwer danke ich für die technische Unterstützung mit – der viel zu oft zickigen – MATILDA-II und den einen oder anderen Tipp, der half, allerlei technische Probleme zu lösen. Für die Unterstützung in bürokratischen Angelegenheiten danke ich Monika Seeger, Linda Sommer und Stephanie Thiedemann.

Meinen Eltern Renate Wilms-Marzisch und Uwe Wilms und meinem Bruder Felix Wilms danke ich dafür, dass sie mich durch die gesamte Zeit des Studiums einschließlich der Promotion begleitet haben und stets eine feste, verlässliche Stütze waren, wie ich sie jedem wünsche. Außerdem danke ich meiner Mutter für das Gegenlesen dieser Arbeit auf orthographische Korrektheit.

Stellvertretend für all die Menschen, die meine Promotion von einem Projekt zu einem schönen und wertvollen Lebensabschnitt haben werden lassen, danke ich unter anderem Markus Baschke, Ute Bergmann, Janine Beyer, Hauke Bornholdt, Daria Dornicheva, Moritz Glaser, Alessandra Kötzler, Niklas Langmaack, Thore Lassen, Linda Schilling, Marek Wriedt, meinen Studienkommilitonen, meinem gesamten Filmabend sowie meinen Mitstreitern bei den Pfadfindern, im Landesjugendring und in der Stiftung Jugendarbeit. Herzlichen Dank für langjährige Freundschaft, Unterstützung und Ablenkung, wenn es mal wieder zu viel wurde.

Abschließend möchte ich meiner Tochter Hanna danken – einfach dafür, dass Du da bist!

Wissenschaftlicher Werdegang

Persönliche Daten

Name:	Jochen Wilms
Geburtsdatum:	29.11.1985
Geburtsort:	Itzehoe
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	ledig (1 Tochter, geboren 2008)

Schulbildung

1992 - 1996	Ernst-Moritz-Arndt-Schule Itzehoe
1996 - 2005	Sophie-Scholl-Gymnasium Itzehoe
Juni 2005	Abitur mit den Leistungskursen Mathematik und Physik

Ersatzdienst

2005 - 2006	Zivildienst in der Umweltabteilung der Stadt Itzehoe
-------------	--

Studium

Oktober 2006	Immatrikulation in den Fächern Mathematik und Physik an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
2008	Physik Vordiplom mit Nebenfach Chemie Zwischenprüfung in den Fächern Mathematik und Physik

2012	Beendigung des Studiums mit den Abschlüssen Diplom in Physik mit Nebenfach Mathematik, Thema der Diplomarbeit: <i>Stereoskopische Diagnostik an staubigen Plasmen</i> Erstes Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik
seit September 2012	Promotion in der Arbeitsgruppe „Plasmadynamik“ am Institut für Experimentelle und Angewandte Physik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Weitere Tätigkeiten in der Math.-Nat. Fakultät

2014-2017	Mitglied des Sektionsausschusses Physik Mitglied der Gleichstellungskommission
-----------	---

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass die vorliegende Dissertation - abgesehen von der Beratung durch meinen wissenschaftlichen Lehrer und der Verwendung der angegebenen Hilfsmittel - nach Inhalt und Form meine eigene ist. Sie hat weder ganz noch teilweise an einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Diese Arbeit ist unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstanden.

Kiel, den 03.11.2017